# 8 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

## Página 185

## REFLEXIONA Y RESUELVE

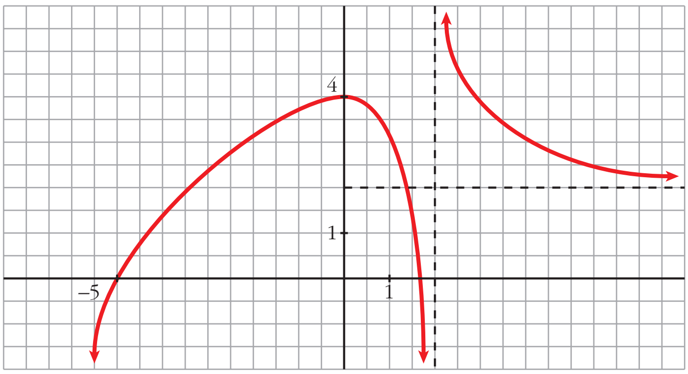
### Descripción de una gráfica

- **Copia en tu cuaderno los datos encuadrados en rojo. A partir de ellos, y sin mirar la gráfica que aparece al principio, representa esta función sobre unos ejes coordenados dibujados en papel cuadriculado.**

(La solución está en el propio ejercicio).

- **Traza unos ejes coordenados sobre papel cuadriculado y representa una curva, lo más sencilla posible, que cumpla las siguientes condiciones:**

  - $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
  - $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$
  - $f(0) = 4;\ f'(0) = 0$
  - $f(-5) = 0;\ f(1{,}75) = 0$
  - $f$ **es derivable en todo** $\mathbb{R}$, **salvo en** $x = 2$.



■ **Describe, con la menor cantidad de datos y de forma similar a la de los apartados anteriores, la siguiente función:**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$
- $f(-9) = 0;\ f(0) = 0;\ f(8) = 0$
- $f'(0) = 0$
- $f(4) = 4;\ f'(4) = 0$

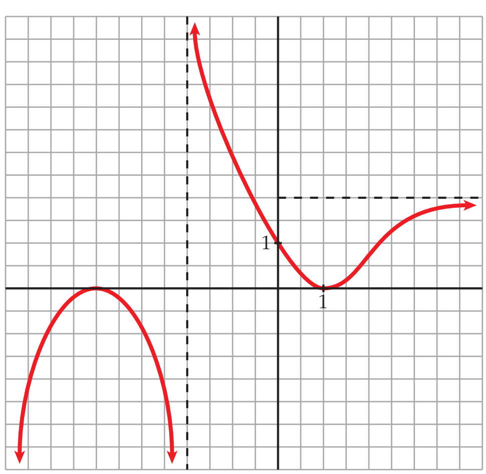
■ **Representa sobre unos ejes en papel cuadriculado una gráfica inventada por ti. Descríbela en papel aparte. Dale la descripción a tu compañera o compañero para que la represente.**

**Representa tú la suya.**

**Comparad cada representación con la curva original. Discutid las diferencias que observéis.**

**¿Hay algún error en la representación? ¿Hay, acaso, error en la descripción?**

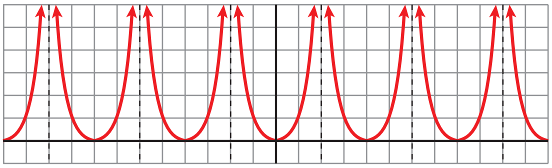
**¿Es todo correcto?**




Por ejemplo:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$
- $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$
- $f(-4) = 0;\ f'(-4) = 0$
- $f(1) = 0;\ f'(1) = 0$
- $f(0) = 1$

■ **Observa esta gráfica:**



- **Halla la ordenada para las siguientes abscisas:**

  $\boldsymbol{x = 0,\ \ x = 1,\ \ x = 3,\ \ x = -7,\ \ x = 12,\ \ x = -400,\ \ x = 13,\ \ x = -199}$

- **¿En qué puntos no está definida esta función?**
- **¿Qué tramo de la función te bastaría conocer para hacerte una idea exacta de cómo es la gráfica?**
- **¿Te sugiere esta curva algún tipo de simetría o periodicidad?**

- $f(0) = 0;\ \ f(1) = 1;\ \ f(3) = 1;\ \ f(-7) = 1$

  $f(12) = 0;\ \ f(-400) = 0;\ \ f(13) = 1;\ \ f(-199) = 1$

  (En general, $f(4k) = 0;\ \ f(4k + 1) = f(4k - 1) = 1$ y no existe $f(x)$ en $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$).

- La función no está definida en los puntos de la forma $x = 4k + 2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

- Bastaría con conocer la función para $x \in [0, 2)$, si supiéramos que es par y que es periódica de período 4.

- Simetría $\rightarrow$ Es una función par (simétrica respecto al eje $Y$).

  Periodicidad $\rightarrow$ Es periódica de período 4.

## Página 186

**1. Halla el dominio de estas funciones:**

**a)** $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

**b)** $y = \dfrac{3x^3 + 5}{x^2 - 5x + 4}$

**c)** $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$

a) *Dominio* = $\mathbb{R}$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

*Dominio* = $\mathbb{R} - \{1, 4\}$

c) $x^2 + 1 \neq 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* = $\mathbb{R}$

**2.** **Halla el dominio de:**

**a)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$ **c)** $y = ln(x^2 - 1)$ **d)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) $x^2 + 1 > 0$ para todo $x \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R}$

c) $x^2 - 1 > 0 \rightarrow$ *Dominio* $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

d) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow$ *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

## Página 187

**3.** **Halla las simetrías y las periodicidades; di dónde son continuas y dónde derivables:**

**a)** $y = 3x^4 - 5x^2 - 1$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

**c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$

**e)** $y = sen\ x + 1/2\ (cos\ 2x)$

a) $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 - 1 = 3x^4 - 5x^2 - 1 = f(x)$

Es una función par: simétrica respecto al eje $Y$.

No es periódica.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) *Dominio* $= (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. No es par ni impar; no es simétrica respecto al eje $Y$ ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua en su dominio.

Es derivable en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{x^2 - 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

d) *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0\}$

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 1}{x^2}$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje $Y$ ni respecto al origen de coordenadas.

No es periódica.

Es continua y derivable en su dominio.

e) *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f(-x) = \cos(-x) + \frac{1}{2}\big(\cos(-2x)\big) = -\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\big(\cos(2x)\big)$$

No es par ni impar.

Es periódica de período $2\pi$.

Es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

## Página 188

**4. Halla las ramas infinitas de:**

**a)** $y = 3x^5 - 20x^3$

**b)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

**c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

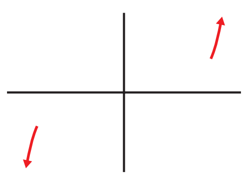
**d)** $y = x^4 - 8x^2 + 7$

**e)** $y = \ln(x^2 + 1)$

**f)** $y = 2^{x-1}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$

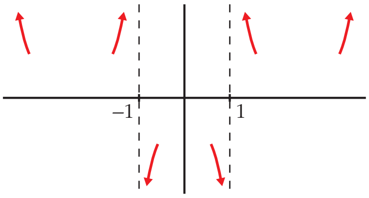
- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

b) $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 1}$

- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Ramas parabólicas}$$
- $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntotas verticales: } x = -1;\ x = 1$$



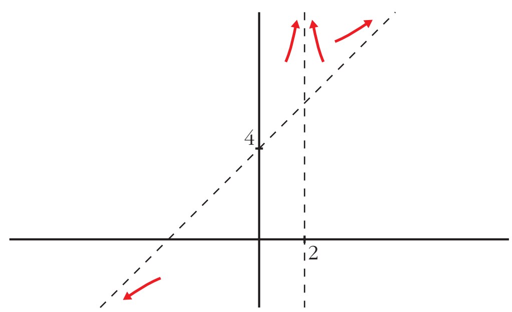
c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2} = \dfrac{x^3}{x^2-4x+4} = x + 4 + \dfrac{12x-16}{x^2-4x+4}$

- *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $y = x + 4$ es una asíntota oblicua.

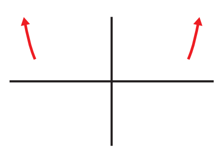
  $$f(x) - (x+4) = \frac{12x-16}{x^2-4x+4} \to \begin{cases} f(x) - (x+4) > 0 & \text{si } x \to +\infty \\ f(x) - (x+4) < 0 & \text{si } x \to -\infty \end{cases}$$

- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical




d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Ramas parabólicas

e) $y = ln(x^2 + 1)$

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

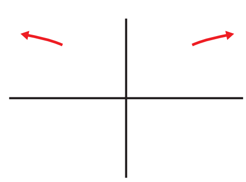
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$

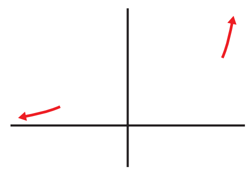
Ramas parabólicas

- No hay asíntotas verticales.



f) $y = 2^{x-1} > 0$ para todo $x$.

- *Dominio* = $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \;\to\; y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$
- No hay asíntotas verticales.



## Página 189

**5. Halla los puntos singulares y los puntos de inflexión de:**

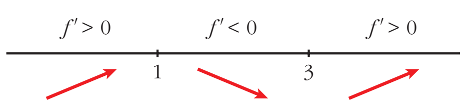
**a)** $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ **b)** $y = ln(x^2 + 1)$

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
- $f'(x) = 0 \;\to\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

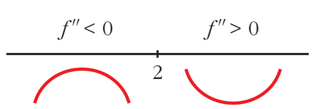



Hay un máximo en $(1, 9)$ y un mínimo en $(3, 5)$.

- $f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \;\to\; 6x - 12 = 0 \;\to\; x = 2$

Signo de $f''(x)$:




Hay un punto de inflexión en $(2, 7)$.

b) $y = ln(x^2 + 1)$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

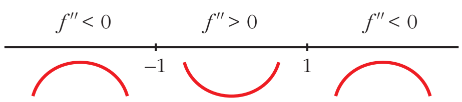
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x = 0 \;\to\; x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \\ f''(x) > 0 \text{ para } x > 0 \end{array}\right\} \text{Hay un mínimo en } (0, 0).$$

• $f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x^2 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array} \right.$

Signo de $f''(x)$:




Hay un punto de inflexión en $(-1, \ln 2)$ y otro en $(1, \ln 2)$.

**6. Halla los puntos singulares de:**

**a)** $y = 3x^5 - 20x^3$

**b)** $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

**c)** $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

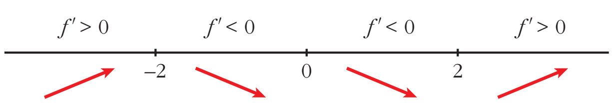
**d)** $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

a) $y = 3x^5 - 20x^3$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 15x^2(x^2 - 4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Signo de $f'(x)$:



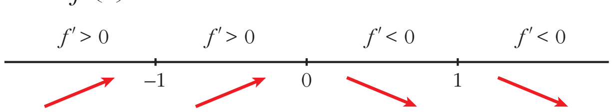

Hay un máximo en $(-2, 64)$, un mínimo en $(2, -64)$, y un punto de inflexión en $(0, 0)$.

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:




Hay un máximo en $(0, 0)$.

c) $y = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-2)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{3x^2(x-2) - 2x^3}{(x-2)^3} =$$

$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-2)^3} = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:


Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y un mínimo en $\left(6, \dfrac{27}{2}\right)$.

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. *Dominio* = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x - 1 = 0 \quad \to \quad x = 1 \notin$ *Dominio*.

No hay puntos singulares.

## Página 191

**1. Representa estas funciones:**

**a)** $\boldsymbol{y = x^4 - 8x^2 + 7}$ **b)** $\boldsymbol{y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2}$ **c)** $\boldsymbol{y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x}$

a) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = x^4 - 8x^2 + 7 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 4x^3 - 16x$

  $$f'(x) = 0 \quad \to \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

  Puntos singulares: $(0, 7)$; $(-2, -9)$; $(2, -9)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow$ Punto: $(0, 7)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0$

  $$x^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \begin{cases} x^2 = 7 \rightarrow x = \pm\sqrt{7} \\ x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

  Puntos: $\left(-\sqrt{7}, 0\right)$; $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $\left(\sqrt{7}, 0\right)$

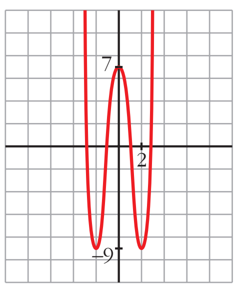
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 12x^2 - 16$

  $f''(x) = 0 \rightarrow 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{4}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

  Puntos $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-17}{9}\right)$ y $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{-17}{9}\right)$

- **Gráfica:**




b) $y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje $Y$, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x$

  $$f'(x) = 0 \rightarrow 12x(x^2 + x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

  Puntos: $(0, 0)$; $(2, -64)$; $(-3, -189)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X$ $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x^2(3x^2 + 4x - 36) = 0$

$$\begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \\ x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 + 432}}{6} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{448}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}86 \\ x \approx -4{,}19 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: (0, 0); (2,86; 0); (–4,19; 0)

- **Puntos de inflexión:**

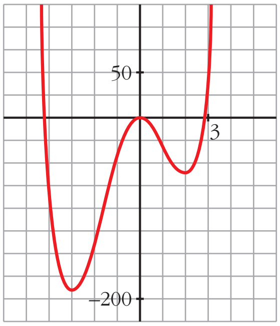
$f''(x) = 36x^2 + 24x - 72$

$f''(x) = 0 \rightarrow 12(3x^2 + 2x - 6) = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 72}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} \begin{cases} x \approx 1{,}12 \\ x \approx -1{,}79 \end{cases}$$

Puntos: (1,12; –34,82) y (–1,79; –107,22)

- **Gráfica:**




c) $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x.$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje $Y$, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 0 \rightarrow 4(x - 1)(x + 1)(x - 3) = 0$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Bigg\} \text{ Puntos } (1, 7); (-1, -9); (3, -9)$$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x(x^3 - 4x^2 - 2x + 12) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 4x^2 - 2x + 12 = 0 \rightarrow (x - 2)(x^2 - 2x - 6) = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x \approx 3{,}65 \\ x \approx -1{,}65 \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $(2, 0)$; $(3{,}65; 0)$; $(-1{,}65; 0)$

- **Puntos de inflexión:**

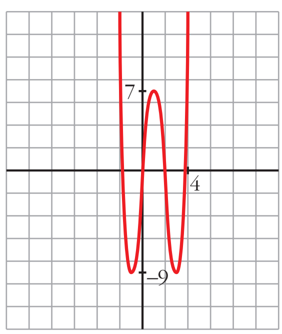
$f''(x) = 12x^2 - 24x - 4$

$f''(x) = 0 \rightarrow 4(3x^2 - 6x - 1) = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 12}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{6} \begin{cases} x \approx 2{,}15 \\ x \approx -0{,}15 \end{cases}$$

Puntos: $(2{,}15; -1{,}83)$ y $(-0{,}15; -1{,}74)$

- **Gráfica:**




**2.** **Representa las siguientes funciones:**

**a)** $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

**b)** $y = x^3 - 3x$

**c)** $y = (1/4)x^4 - 2x^2$

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 16$

- **Simetrías:**

$f(-x) = 3x^4 + 4x^3 - 16$. No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje $Y$, ni respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 12x^2(x-1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos: $(0, -16)$; $(1, -17)$

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad y = -16 \quad \to$ Punto: $(0, -16)$

— Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad 3x^4 - 4x^3 - 16 = 0 \quad \to$

$\begin{cases} x = 2 \\ 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases}$ $\to$ tiene una sola raíz, que está entre $-2$ y $-1$; pues, si $g(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $g(-2) = -16 < 0$ y $g(-1) = 3 > 0$.

Puntos $(2, 0)$ y $(k, 0)$, con $k$ entre $-2$ y $-1$.

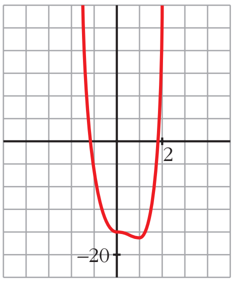
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 36x^2 - 24x$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 12x(3x-2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Puntos: $(0, -16)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-448}{27}\right)$

- **Gráfica:**




b) $y = x^3 - 3x$

- **Simetrías:**

$f(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Ramas infinitas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 3(x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Puntos: $(-1, 2)$; $(1, -2)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: $(0, 0)$

  — Con el eje $X \to y = 0 \to x^3 - 3x = 0 \to x(x^2 - 3) = 0$

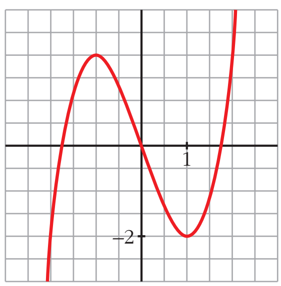
  $$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right\} \text{ Puntos: } (0, 0);\ \left(-\sqrt{3}, 0\right);\ \left(\sqrt{3}, 0\right)$$

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \to 6x = 0 \to x = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

- **Gráfica:**




c) $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **Ramas infinitas:**

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = x^3 - 4x$

  $f'(x) = 0 \to x(x^2 - 4) = 0 \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}$

  Puntos: $(0, 0)$; $(-2, -4)$; $(2, -4)$

- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 2\right) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 8 \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$; $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$

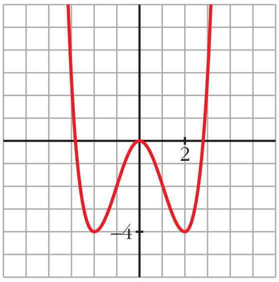
- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = 3x^2 - 4$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Puntos: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

- **Gráfica:**




## Página 193

**1. Representa:**

**a)** $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

**b)** $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x}$

a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2} = -x + \dfrac{x}{1 - x^2}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3}{1 - x^2} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 1.$$

- **Asíntota oblicua:**

$$\frac{x^3}{1 - x^2} = -x + \frac{x}{1 - x^2} \quad \to \quad y = -x \text{ es asíntota oblicua.}$$

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (-x) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (-x) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(1 - x^2) - x^3 \cdot (-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1 - x^2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1 - x^2)^2}$$

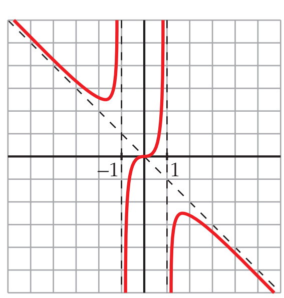
$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2(-x^2 + 3) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

Puntos: $(0, 0)$; $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- **Cortes con los ejes:**

Corta a los ejes en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{-x}$

No es par ni impar: no es simétrica respecto al eje $Y$, ni respecto al origen.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 0.$$

- **Asíntota oblicua:**

$\frac{x^2 - 2x - 8}{x} = x - 2 - \frac{8}{x} \rightarrow y = x - 2$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - (x - 2) > 0$ si $x \to -\infty$ (curva por encima)

$f(x) - (x - 2) < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^2} > 0$ para todo $x$ del dominio.

La función es creciente en todo su dominio. No tiene puntos singulares.

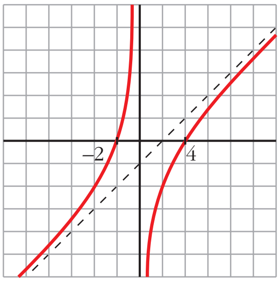
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$

Puntos: $(-2, 0)$ y $(4, 0)$

— No corta el eje $Y$, pues no está definida en $x = 0$.

- **Gráfica:**



**2.** **Representa:**

**a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}}$

a) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical en } x = 2.$$

- **Asíntota horizontal:**

$\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4} = 1 - \dfrac{5}{x^2 - 4} \quad \to \quad y = 1$ es asíntota horizontal.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - 1 < 0$ si $x \to +\infty$ (curva por debajo)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x(x^2 - 4 - x^2 + 9)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{10x}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 10x = 0 \quad \to \quad x = 0 \quad \to \quad$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

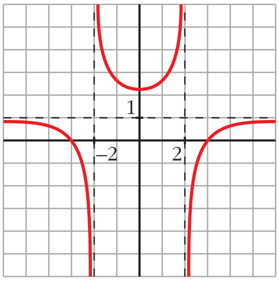
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y$ $\to$ $x = 0$ $\to$ $y = \dfrac{9}{4}$ $\to$ Punto: $\left(0, \dfrac{9}{4}\right)$

— Con el eje $X$ $\to$ $y = 0$ $\to$ $x^2 - 9 = 0 \; \begin{cases} x = -3 \\ x = 3 \end{cases}$

Puntos: $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

- **Simetrías:**

$f(-x) = \dfrac{-x^3 - 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$. Es impar: simétrica respecto al origen de coordenadas.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Asíntota oblicua:**

$\dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = x + \dfrac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = x$ es asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto a la asíntota:

$f(x) - x < 0$ si $x \rightarrow -\infty$ (curva por debajo)

$f(x) - x > 0$ si $x \rightarrow +\infty$ (curva por encima)

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 2)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 + 2x^2 + 2 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x^4 + x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

No hay puntos singulares.

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow$ Punto: $(0, 0)$

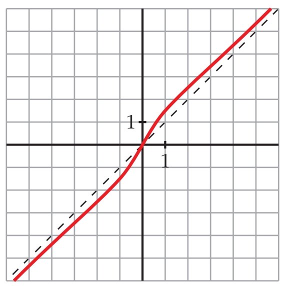
- **Puntos de inflexión:**

$$f''(x) = \frac{(4x^3 + 2x)(x^2+1)^2 - (x^4 + x^2 + 2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$$

$$= \frac{(4x^3 + 2x)(x^2+1) - 4x(x^4 + x^2 + 2)}{(x^2+1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } (0,\, 0);\ \left(-\sqrt{3},\, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right);\ \left(\sqrt{3},\, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$$

- **Gráfica:**




## Página 195

**1. Representa:**

**a)** $y = e^{1-x^2}$ **b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ **c)** $y = ln\,(x^2 + 4)$

a) $y = e^{1-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Simetría:**

  $f(-x) = e^{1-x^2} = f(x)$. Es una función par: es simétrica respecto al eje $Y$.
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

  $y = 0$ es asíntota horizontal. Además, como $e^{1-x^2} > 0$ para todo $x$, la curva se sitúa por encima de la asíntota.
- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2}$

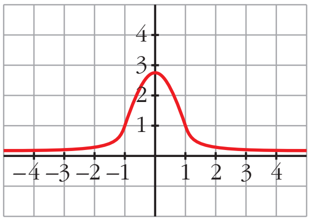
  $f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow$ Punto $(0, e)$
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = -2e^{1-x^2} + (-2x) \cdot (-2x)e^{1-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{1-x^2}$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^2 = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \simeq 0{,}7 \;\rightarrow\; f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{1/2} \simeq 1{,}65$

Puntos de inflexión: $(-0{,}7;\ 1{,}65)$, $(0{,}7;\ 1{,}65)$

- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- **Dominio**: $D = \mathbb{R} - \{0\}$
- **No es simétrica.**
- **Asíntotas verticales:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{Asíntota vertical: } x = 0.$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Además, $f(x) > 0$ para todo $x$ del dominio.

$y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

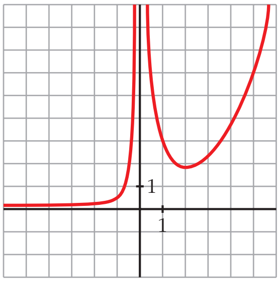
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Rama parabólica.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cdot e^x(x-2)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\;$ Punto $\left(2,\ \dfrac{e^2}{4}\right)$

- **Gráfica:**



c) $y = ln\,(x^2 + 4)$

- **Dominio:**

  Como $x^2 + 4 > 0$ para todo $x$, $D = \mathbb{R}$.

- **Simetrías:**

  $f(-x) = ln\,(x^2 + 4) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **No tiene asíntotas verticales.**

- **Ramas infinitas:**

  $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\,(x^2 + 4)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 4}}{1} = 0$$

  Por tanto, no tiene asíntotas de ningún tipo.

  Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

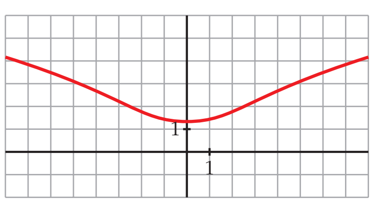
  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\;$ Punto $(0,\, ln\, 4)$

- **Puntos de inflexión:**

  $$f''(x) = \frac{2(x^2 + 4) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x^2 + 8 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{8 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2}$$

  $$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 8 - 2x^2 = 0 \;\left\langle \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right\}$$ Puntos: $(-2,\, ln\, 8)$ y $(2,\, ln\, 8)$

- **Gráfica:**




**2.** **Representa:**

**a)** $y = ln\,(x^2 - 1)$ **b)** $y = \sqrt{3}\; sen\, x + cos\, x$

a) $y = ln\,(x^2 - 1)$

- **Dominio:**

  $x^2 - 1 > 0 \;\rightarrow\;$ *Dominio* $= (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

- **Simetrías:**

  $f(-x) = ln\ (x^2 - 1) = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **Asíntotas verticales:**

  $$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$$

  $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ln\ (x^2 - 1)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}}{1} = 0$$

  Tiene ramas parabólicas.

- **Puntos singulares:**

  $$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x = 0 \quad \to \quad x = 0$

  No tiene puntos singulares, pues la función no está definida en $x = 0$.

- **Puntos de inflexión:**

  $$f''(x) = \frac{2(x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

  No tiene puntos de inflexión.

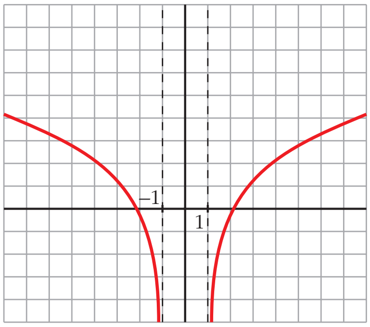
- **Puntos de corte con los ejes:**

  — Con el eje $X \quad \to \quad y = 0 \quad \to \quad ln\ (x^2 - 1) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 1$

  $$x^2 = 2 \left< \begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array} \right\} \text{ Puntos: } \left(-\sqrt{2},\ 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{2},\ 0\right)$$

  — No corta al eje $Y$, pues no existe $f(0)$.

- **Gráfica:**



b) $y = \sqrt{3}\, sen\, x + cos\, x$

- Está definida, y es *continua* y *derivable* en todo $\mathbb{R}$.
- Es *periódica* de período $2\pi \to$ solo la estudiamos en $[0, 2\pi]$.
- No existe $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \to$ no tiene asíntotas ni ramas parabólicas.
- **Puntos de corte con los ejes:**

  — Con el eje $Y \to x = 0 \to f(0) = 1 \to$ Punto $(0, 1)$

  — Con el eje $X \to y = 0 \to \sqrt{3}\, sen\, x + cos\, x = 0$

  $$\sqrt{3}\, tg\, x + 1 = 0 \to tg\, x = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \to x = \frac{5\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}$$

  Puntos $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right); \left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = \sqrt{3}\, cos\, x - sen\, x$

  $f'(x) = 0 \to \sqrt{3}\, cos\, x - sen\, x = 0 \to \sqrt{3} - tg\, x = 0 \to$

  $$\to tg\, x = \sqrt{3} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} \to \text{Punto } \left(\dfrac{\pi}{3}, 2\right) \\ x = \dfrac{4\pi}{3} \to \text{Punto } \left(\dfrac{4\pi}{3}, -2\right) \end{cases}$$

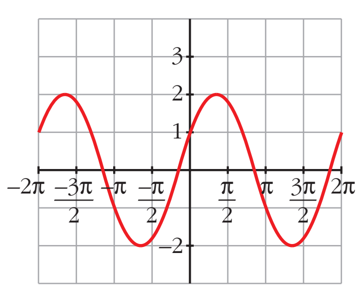
- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = -\sqrt{3}\, sen\, x - cos\, x = -f(x)$

  $f''(x) = 0 \leftrightarrow f(x) = 0$

  Los puntos de inflexión son los de corte con el eje $X$.

- **Gráfica:**



## Página 197

**1. Representa:**

**a)** $y = x - |x - 3| + |x + 1|$

**b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{|x| + 1}$

**c)** $y = |x - 5|x$

a) Intervienen dos valores absolutos, $|x + 1|$ y $|x - 3|$, que cambian de signo en las abscisas $x = -1$ y $x = 3$, respectivamente.

Por tanto:

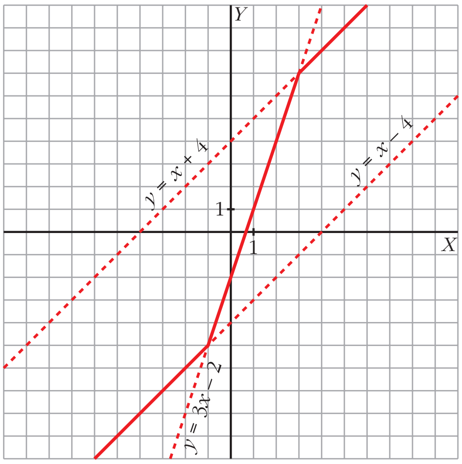
$x < -1$, $|x + 1| = -x - 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 - x - 1 = x - 4$

$-1 \le x < 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = -x + 3 \rightarrow y = x + x - 3 + x + 1 = 3x - 2$

$x \ge 3$, $|x + 1| = x + 1$ y $|x - 3| = x - 3 \rightarrow y = x - x + 3 + x + 1 = x + 4$

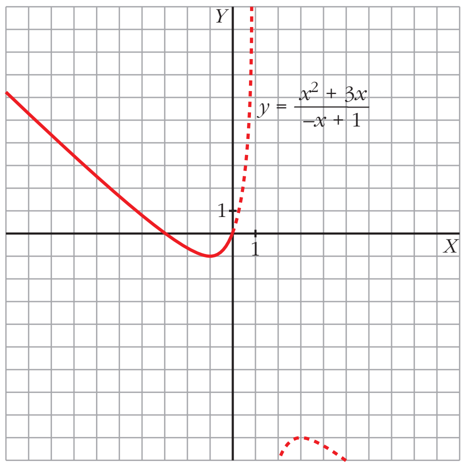
Representamos, pues, esta función:

$$y = x - |x - 3| + |x + 1| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{si } -1 \le x < 3 \\ x + 4 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

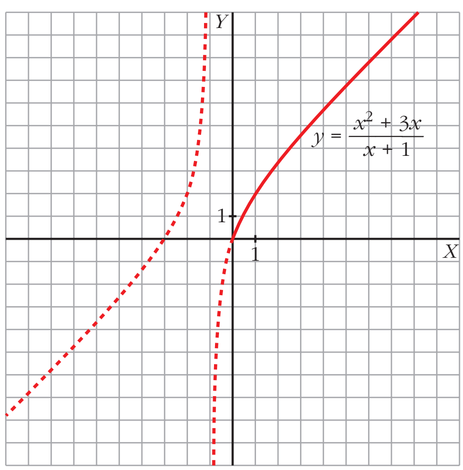


b) El único valor absoluto que interviene es $|x|$. La abscisa en donde cambia de signo $x$ es 0. Por tanto:

$$x < 0, \ |x| = -x \ \rightarrow \ y = \frac{x^2 + 3x}{-x + 1}$$

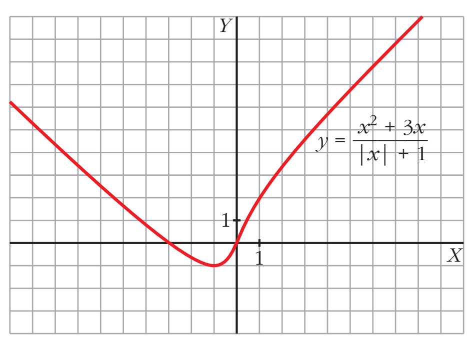



$$x \geq 0, \ |x| = x \ \rightarrow \ y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$




Representamos, pues, esta función:

$$y = \frac{x^2 + 3x}{|x| + 1} = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{-x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

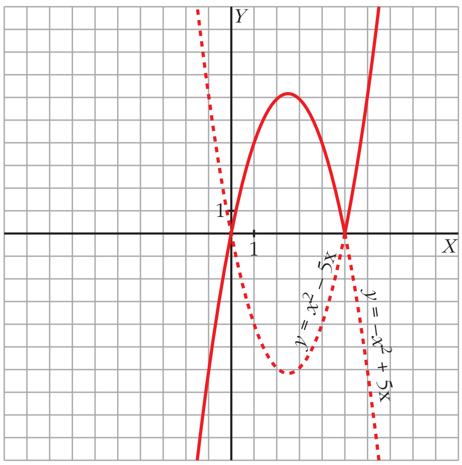


c) El único valor absoluto que interviene es $|x - 5|$. La abscisa donde cambia de signo $x - 5$ es 5. Por tanto, analizamos cómo queda la función a la izquierda y a la derecha de 5:

$x < 5 \ \to \ |x - 5| = -x + 5 \ \to \ y = (-x + 5)x = -x^2 + 5x$

$x \geq 5 \ \to \ |x - 5| = x - 5 \ \to \ y = (x - 5)x = x^2 - 5x$

$$y = |x - 5|x = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } x < 5 \\ x^2 - 5x & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$



## Página 204

# EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

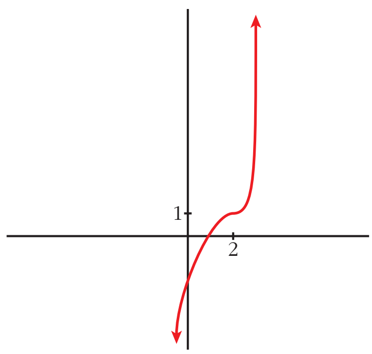
### PARA PRACTICAR

### Descripción de una gráfica

**1** **Representa una función continua y derivable en $\mathbb{R}$ tal que:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad f'(2) = 0$$

$f(2) = 1$, $f'(x) \geq 0$ **para cualquier** $x$.




**2** **De una función** $y = f(x)$ **tenemos esta información:**

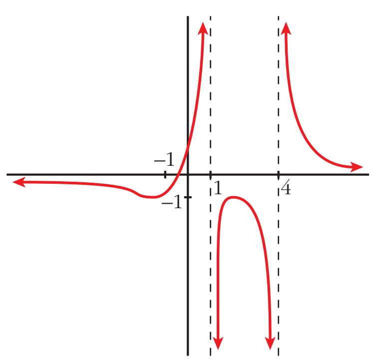
$D = \mathbb{R} - \{1, 4\}$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

(**si** $x \to +\infty$, $f(x) > 0$; **si** $x \to -\infty$, $f(x) < 0$)

$f'(2) = 0$, $f(2) = -1$; $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -1$

**Represéntala.**

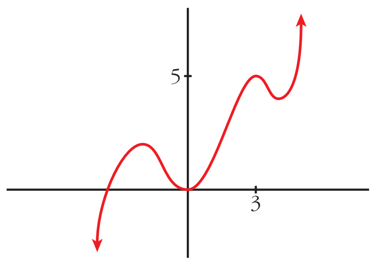


**s3** **Dibuja la gráfica de una función de la que se conocen las siguientes propiedades:**

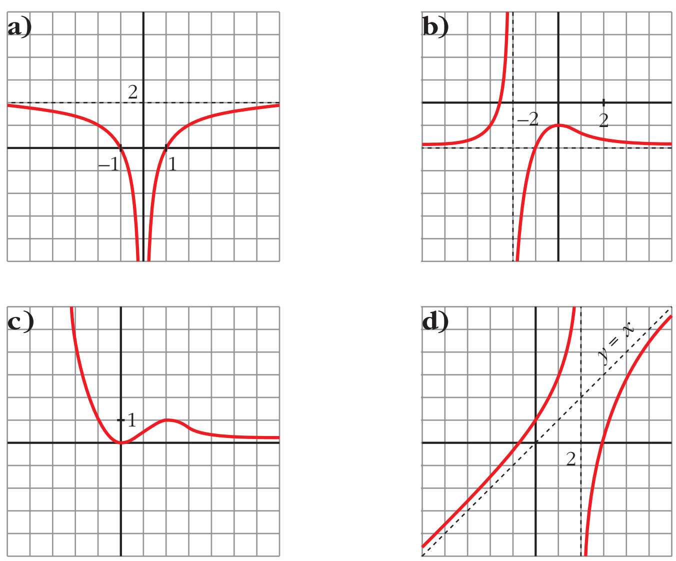
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = 0$ si $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$

$f(-2) = 2$; $f(0) = 0$; $f(3) = 5$; $f(4) = 4$




**s4** **Describe las siguientes funciones indicando sus asíntotas y ramas infinitas, sus puntos singulares y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**




a) • Asíntotal horizontal: $y = 2$. Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

• $f(x)$ no tiene puntos singulares.

• Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

b) • Asíntotal horizontal: $y = -2$. Asíntota vertical: $x = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > -2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > -2$)

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

- Puntos singulares: $f'(0) = 0$; $f(0) = -1$. Máximo en $(0, -1)$
- Creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$.

c) • Asíntota horizontal si $x \to +\infty$: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- Puntos singulares:

$f'(0) = 0$; $f(0) = 0$. Mínimo en $(0, 0)$

$f'(2) = 0$; $f(2) = 1$. Máximo en $(2, 1)$

- Decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en $(0, 2)$.

d) • Asíntota vertical: $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

- Asíntota oblicua: $y = x$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- No tiene puntos singulares.
- Creciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

## Funciones polinómicas

**5** **Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de las siguientes funciones, y represéntalas:**

**a)** $y = -x^2 + 3x + 10$ **b)** $y = \dfrac{3x^2 - 12x}{4}$

**c)** $y = (x + 1)^2 + 3$ **d)** $y = -2x^2 + 12x - 9$

**e)** $y = x^3 - 9x$ **f)** $y = -x^3 - 6x^2$

a) $y = -x^2 + 3x + 10$

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 3x + 10) = -\infty$

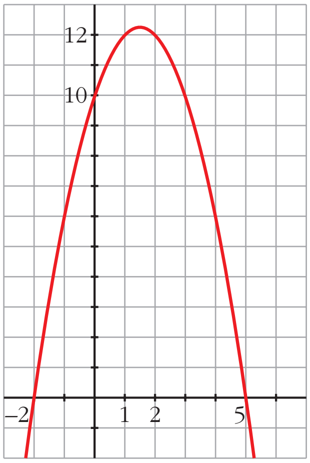
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 3x + 10) = -\infty$

- Puntos singulares:

$y' = -2x + 3;\ \ y' = 0 \ \to\ -2x + 3 = 0 \ \to\ x = \dfrac{3}{2},\ \ y = \dfrac{49}{4}$

$y'' = -2 < 0.$ Máximo: $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{49}{4}\right)$

- Representación:




b) $y = \dfrac{3x^2 - 12x}{4}$

- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 12x}{4} = +\infty$

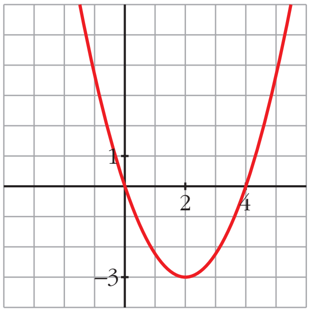
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 - 12x}{4} = +\infty$

- Puntos singulares:

$y' = \dfrac{6x - 12}{4};\ \ y' = 0 \ \to\ 6x - 12 = 0 \ \to\ x = 2,\ \ y = \dfrac{12 - 24}{4} = -3$

$y'' = \dfrac{3}{2} > 0.$ Mínimo: $(2, -3)$

- Representación:



c) $y = (x + 1)^2 + 3$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x + 1)^2 + 3 = +\infty$$

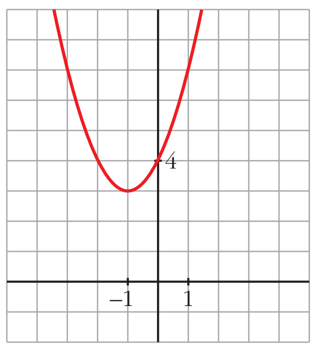
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 + 3 = +\infty$$

- Puntos singulares:

$y' = 2(x + 1);\ \ y' = 0 \ \to\ 2(x + 1) = 0 \ \to\ x = -1,\ \ y = 3$

$y'' = 2 > 0.$ Mínimo: $(-1, 3)$

- Representación:




d) $y = -2x^2 + 12x - 9$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^2 + 12x - 9) = -\infty$$

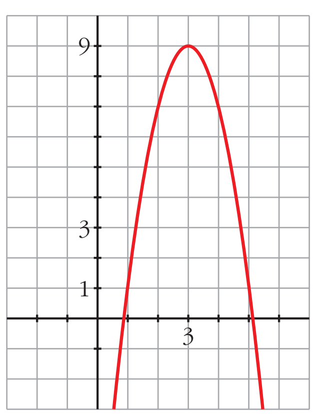
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^2 + 12x - 9) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$y' = -4x + 12;\ \ y' = 0 \ \to\ -4x + 12 = 0 \ \to\ x = 3,\ \ y = 9$

$y'' = -4 < 0.$ Máximo: $(3, 9)$

- Representación:



e) $y = x^3 - 9x$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x) = +\infty$$

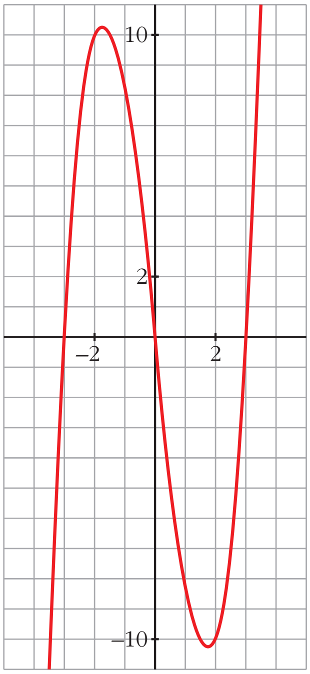
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$y' = 3x^2 - 9;\ \ y' = 0 \ \to\ 3x^2 - 9 = 0 \ \to\ x^2 = 3 \begin{cases} x = \sqrt{3},\ \ y = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3},\ \ y = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

$$y'' = 6x \begin{cases} y''(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} > 0. \ \ \text{Mínimo: } (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \\ y''(-\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} < 0. \ \ \text{Máximo: } (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \end{cases}$$

- Representación:




f) $y = -x^3 - 6x^2$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^3 - 6x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3 - 6x^2) = +\infty$$

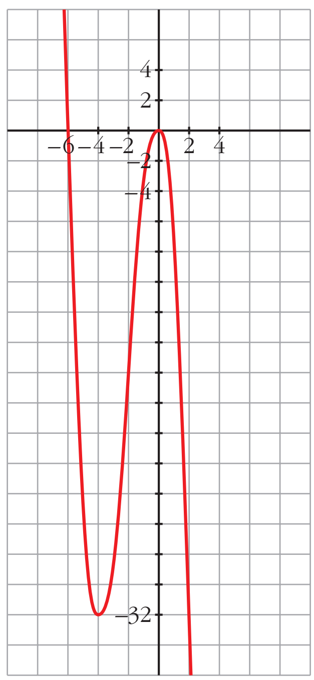
- Puntos singulares:

$y' = -3x^2 - 12x; \;\; y' = 0 \;\to\; -3x^2 - 12x = 0 \;\to$

$$\to\; -3x(x-4) = 0 \;\begin{cases} x = 0, \;\; y = 0 \\ x = -4, \;\; y = -32 \end{cases}$$

$$y'' = -6x - 12 \;\begin{cases} y''(0) = -12 < 0. \;\; \text{Máximo: } (0, 0) \\ y''(-4) = 12 > 0. \;\; \text{Mínimo: } (-4, -32) \end{cases}$$

- Representación:

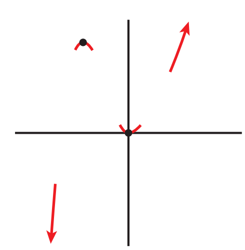



**6** **Estudia y representa las siguientes funciones:**

**a)** $\boldsymbol{y = x^3 + 3x^2}$ **b)** $\boldsymbol{y = x^3 - 3x^2 + 5}$ **c)** $\boldsymbol{y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10}$

**d)** $\boldsymbol{y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}}$ **e)** $\boldsymbol{y = x^5 - 5x^3}$ **f)** $\boldsymbol{y = (x-1)^3 - 3x}$

a) $y = x^3 + 3x^2$



- Ramas infinitas:

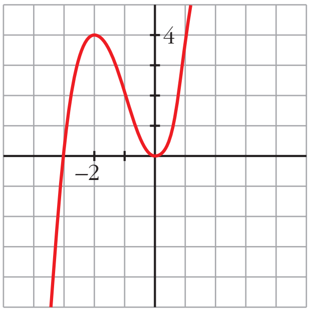
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 + 6x; \;\; 3x^2 + 6x = 0 \;\to\; x(3x + 6) = 0$

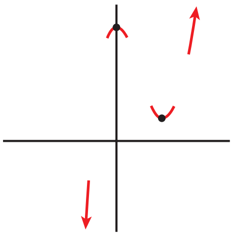
$$\begin{cases} x = 0, \;\; f(0) = 0 \;\to\; (0, 0) \text{ es un mínimo.} \\ x = -2, \;\; f(-2) = -8 + 3 \cdot 4 = 4 \;\to\; (-2, 4) \text{ es un máximo.} \end{cases}$$

- Representación:




b) $y = x^3 - 3x^2 + 5$

- Ramas infinitas:



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

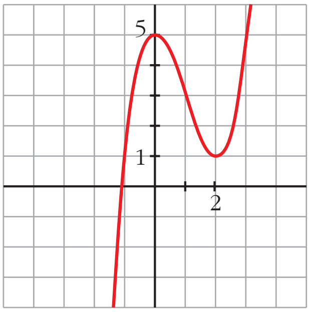
- Puntos singulares:

$f(x) = 3x^2 - 6x; \;\; 3x^2 - 6x = 0 \;\; \to \;\; x(3x - 6) = 0$

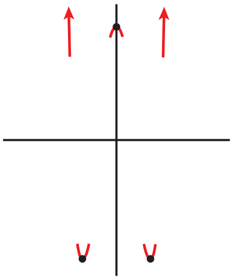
$x = 0, \;\; f(0) = 5 \;\; \to \;\; (0, 5)$ es un máximo.

$x = 2, \;\; f(2) = 1 \;\; \to \;\; (2, 1)$ es un mínimo.

- Representación:




c) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{9}{2}x^2 + 10$



- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

- Puntos singulares:

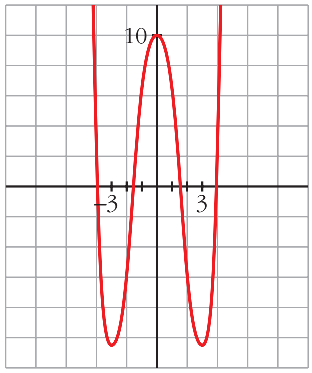
$f'(x) = \dfrac{4x^3}{4} - \dfrac{9}{2} \cdot 2x = x^3 - 9x; \;\; x^3 - 9x = 0 \;\; \to \;\; x(x^2 - 9) = 0$

$x = 0, \;\; f(0) = 10 \;\; \to$ Máximo en $(0, 10)$.

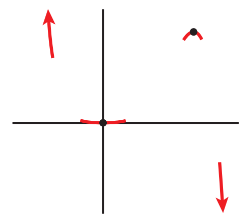
$x = -3, \;\; f(-3) = -41/4 \;\; \to$ Mínimo en $(-3, -41/4)$.

$x = 3, \;\; f(3) = -41/4 \;\; \to$ Mínimo en $(3, -41/4)$.

- Representación:




d) $y = \dfrac{5x^4 - x^5}{64}$



- Ramas infinitas:

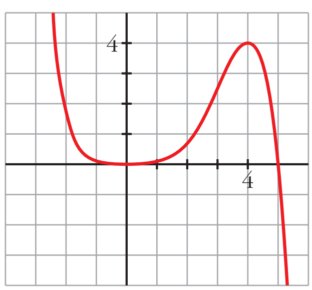
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

- Puntos singulares:

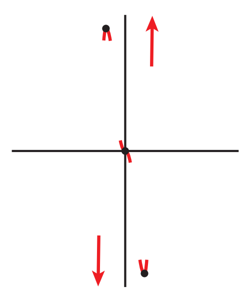
$$f'(x) = \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4); \quad \frac{1}{64}(20x^3 - 5x^4) = 0 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow \; x^3(20 - 5x) = 0 \; \begin{cases} x = 0, \;\; f(0) = 0 \;\rightarrow\; \text{Mínimo en } (0, 0). \\ x = 4, \;\; f(4) = 4 \;\rightarrow\; \text{Máximo en } (4, 4). \end{cases}$$

- Representación:




e) $y = x^5 - 5x^3$



- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

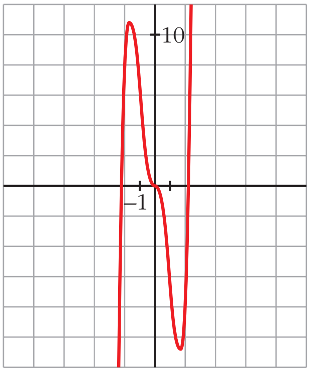
- Puntos singulares:

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2; \;\; 5x^4 - 15x^2 = 0 \;\rightarrow\; 5x^2(x^2 - 3) = 0$$

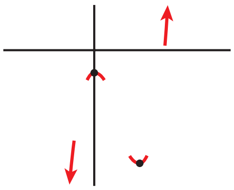
$$\begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 0 \\ x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; f(\sqrt{3}) = \sqrt{3^5} - 5\sqrt{3^3} = 9\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = -6\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; f(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3^5} + 5\sqrt{3^3} = -9\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \end{cases}$$

Tiene un máximo en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$, un mínimo en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ y un punto de inflexión en (0, 0).

- Representación:




f) $y = (x-1)^3 - 3x$



- Ramas infinitas:

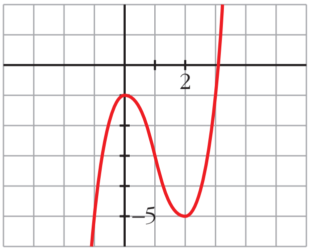
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x-1)^2 - 3;\ \ 3(x-1)^2 - 3 = 0 \ \to$

$\to\ (x-1)^2 = 1$ $\begin{cases} x = 0,\ f(0) = -1 \ \to \ \text{Máximo en } (0, -1) \\ x = 2,\ f(2) = -5 \ \to \ \text{Mínimo en } (2, -5) \end{cases}$

- Representación:

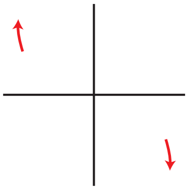



**7** **Estudia las ramas infinitas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones. Represéntalas gráficamente:**

**a)** $y = 3 + (2-x)^3$ **b)** $y = 2 - (x-3)^4$

**c)** $y = (x+1)^6 - 5$ **d)** $y = 3 - (1-x)^3$

a) $y = 3 + (2-x)^3$

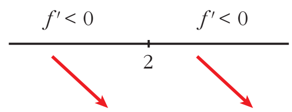


- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

- Puntos singulares:

$f'(x) = -3(2-x)^2;\ \ -3(2-x)^2 = 0 \ \to\ x = 2;\ \ f(2) = 3$

Signo de $f'$:



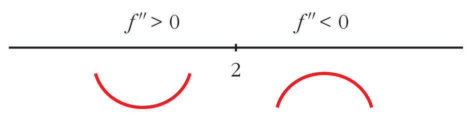

$f$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

No tiene máximos ni mínimos.

Puntos de inflexión:

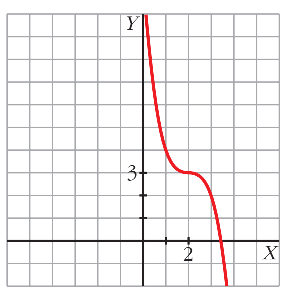
$f''(x) = 6(2-x);\ \ 6(2-x) = 0 \ \to\ x = 2;\ \ f(2) = 3$

Signo de $f''$:



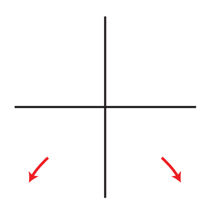

El punto (2, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal $(f''(2) = 0$ y $f'(2) = 0)$.

- Gráfica:




b) $y = 2 - (x-3)^4$

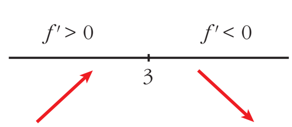
- Ramas infinitas $\left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{array} \right.$



- Puntos singulares:

$f'(x) = -4(x-3)^3;\ \ -4(x-3)^3 = 0 \ \to\ x = 3;\ \ f(3) = 2$

Signo de $f'$:



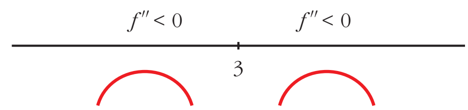

$f$ es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, +\infty)$.

Tiene un máximo en (3, 2).

Puntos de inflexión:

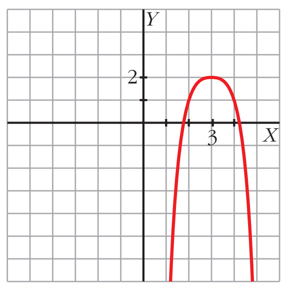
$f''(x) = -12(x-3)^2;\ \ -12(x-3)^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 3;\ f(3) = 2$

Signo de $f''$:




No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:

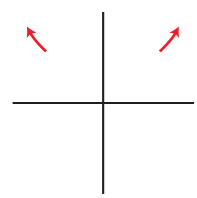



c) $y = (x+1)^6 - 5$

- Ramas infinitas

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

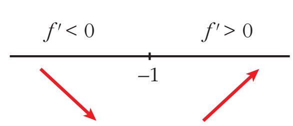
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 6(x+1)^5;\ \ 6(x+1)^5 = 0 \ \rightarrow\ x = -1;\ f(-1) = -5$

Signo de $f'$:



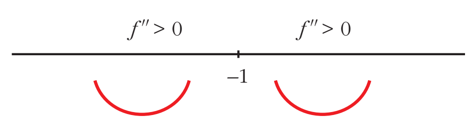

Decreciente en $(-\infty, -1)$. Creciente en $(-1, +\infty)$.

Mínimo en $(-1, -5)$.

Puntos de inflexión:

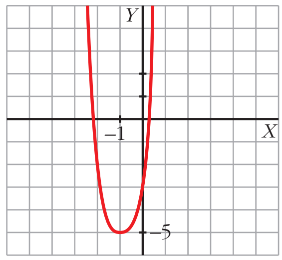
$f''(x) = 30(x+1)^4;\ \ 30(x+1)^4 = 0 \ \rightarrow\ x = -1;\ f(-1) = -5$

Signo de $f''$:



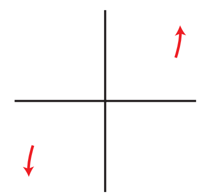

No tiene puntos de inflexión.

- Gráfica:




d) $y = 3 - (1 - x)^3$

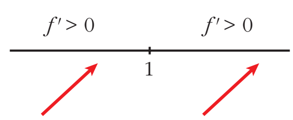
- Ramas infinitas $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(1 - x)^2$; $3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow x = 1$; $f(1) = 3$

Signo de $f'$:



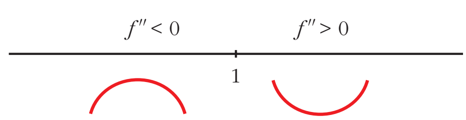

$f$ es creciente en $\mathbb{R}$.

No tiene máximos ni mínimos.

Puntos de inflexión:

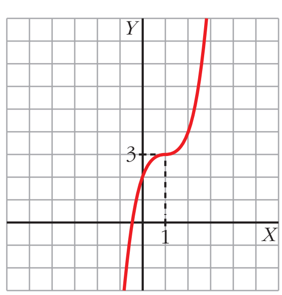
$f''(x) = -6(1 - x)$; $-6(1 - x) = 0 \rightarrow x = 1$; $f(1) = 3$

Signo de $f''$:




(1, 3) es un punto de inflexión con tangente horizontal, puesto que $f'(1) = 0$.

- Gráfica:



## Funciones racionales

**8** **En las siguientes funciones, estudia su dominio, asíntotas y posición de la curva respecto de estas, y represéntalas a partir de los resultados obtenidos:**

**a)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **b)** $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

**d)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ **e)** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

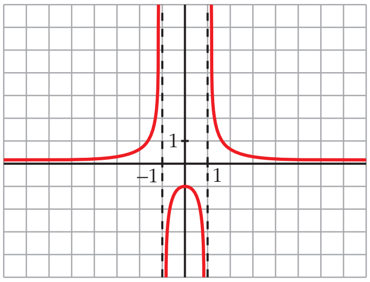
$y = 0$ es asíntota horizontal.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$

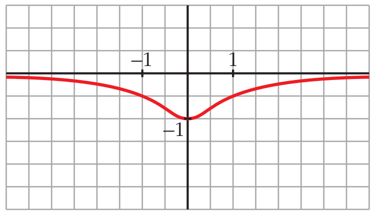
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$)

• **Gráfica:**




c) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

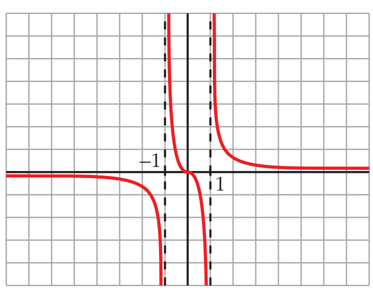
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

• **Gráfica:**




d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x} = x - \dfrac{1}{x}$

• **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

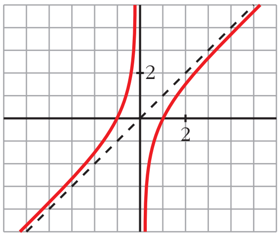
• **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x$)

- **Gráfica:**




e) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

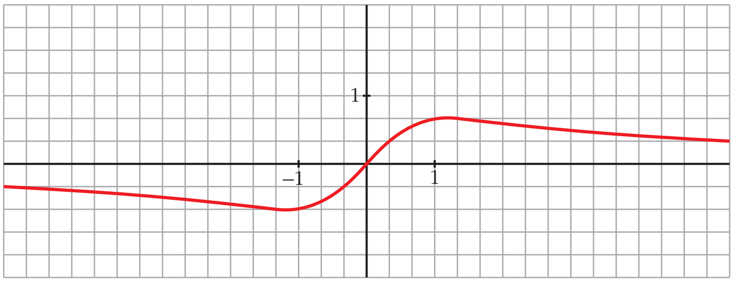
- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

- **Gráfica:**




f) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

- **Dominio:**

$x^2 + x + 1 = 0 \;\to\; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} \;\to$ No tiene solución.

$D = \mathbb{R}$

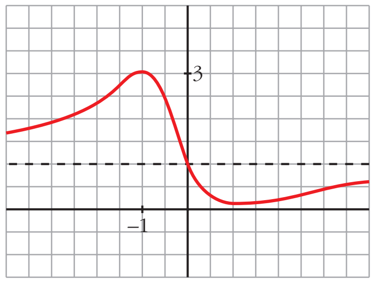
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) > 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

- **Gráfica:**




9 **Representa estas funciones estudiando previamente su dominio, asíntotas, posición y extremos relativos:**

**a)** $y = 2x + \dfrac{8}{x}$  **b)** $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$  **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$  **d)** $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

a) $y = 2x + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x$ es asíntota oblicua.

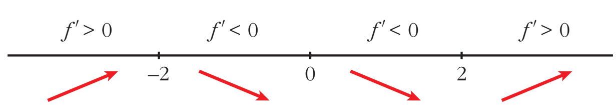
(si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \;\to\; x^2 = 4 \;<\; \begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}$

Signo de la derivada:



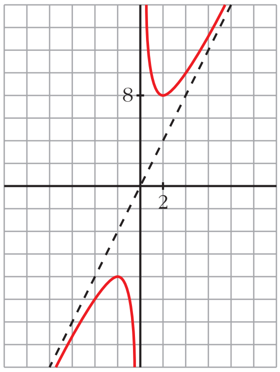

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -8)$.

tiene un mínimo en $(2, 8)$.

- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{2x}{(x+1)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-1\}$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

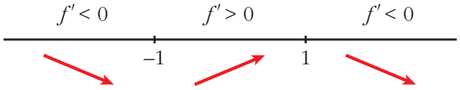
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 2x \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(2x+2-4x)}{(x+1)^4} = \frac{-2x+2}{(x+1)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -2x + 2 = 0 \;\to\; x = 1$

Signo de $f'(x)$:

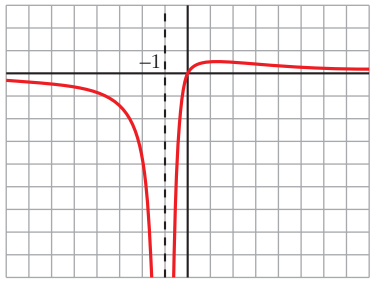



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

es creciente en $(-1, 1)$.

tiene un máximo en $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.

- **Gráfica:**




c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = x + \dfrac{4x}{x^2 - 4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; x^2(x^2 - 12) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{12} \\ x = \sqrt{12} \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:

| $f' > 0$ | $-\sqrt{12}$ | $f' < 0$ | $-2$ | $f' < 0$ | $0$ | $f' < 0$ | $2$ | $f' < 0$ | $\sqrt{12}$ | $f' > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↗ |

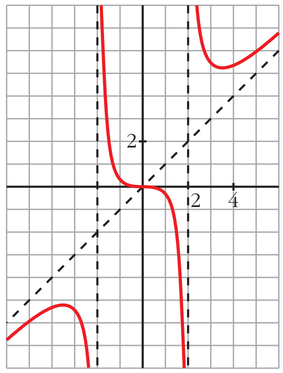
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12}) \cup (\sqrt{12}, +\infty)$.

es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \sqrt{12})$.

tiene un máximo en $(-\sqrt{12}, -3\sqrt{3})$.

tiene un mínimo en $(\sqrt{12}, 3\sqrt{3})$.

- **Gráfica:**




d) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 1$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 1$)

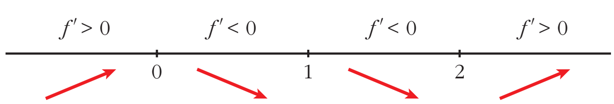
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \; \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

Signo de $f'(x)$:



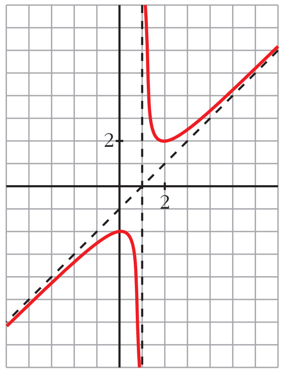

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -2)$.

tiene un mínimo en $(2, 2)$.

- **Gráfica:**




## Página 205

### Funciones "a trozos"

**10** **Representa esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. ¿Tiene algún punto de inflexión?**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x < 0$, es una parábola abierta hacia abajo:

  Vértice: $f'(x) = -2x - 2$; $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$, $f(-1) = 3$

  Cortes con el eje $X$: $-x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2}$

  $x \simeq 0{,}73$ (no vale por ser $0{,}73 > 0$)

  $x \simeq -2{,}73$

- Si $x \geq 0$, es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $f'(x) = 2x - 2$; $2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$, $f(1) = 1$

  Cortes con el eje $X$: $x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \rightarrow$ No tiene solución.

  No corta al eje $X$.

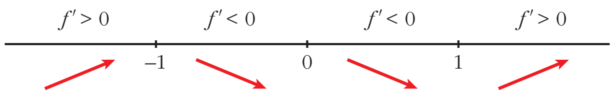
  Corte con el eje $Y$: $0 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow (0, 2)$

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  $f'(0^-) = -2 = f'(0^+)$ Es derivable en $x = 0$.

- Signo de $f'(x)$:




Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Decrece en $(-1, 1)$.

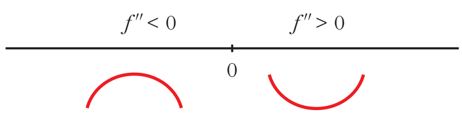
Tiene un máximo en $(-1, 3)$ y un mínimo en $(1, 1)$.

- Puntos de inflexión:

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f''(0^-) \neq f''(0^+)$. No existe $f''(0)$.

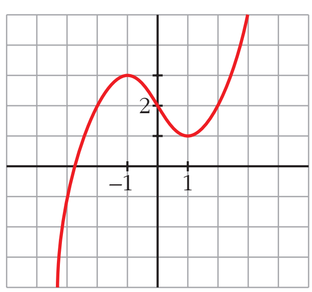
Signo de $f''(x)$:




La función es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$.

En $(0, 2)$ tiene un punto de inflexión.

- Representación:




**11** **Representa las siguientes funciones. Indica, en cada caso, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos, si los hay:**

**a)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

**c)** $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f$ es continua si $x \neq 1$ porque son continuas las funciones que la definen.

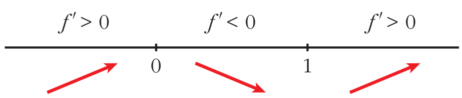
No es continua en $x = 1$, porque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -3$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 1$, porque no es continua.

$f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0,\;\; 2x = 0 \;\to\; x = 0$

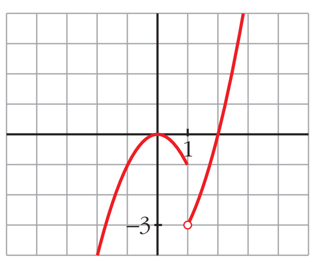
Signo de $f'$:




Crece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(0, 1)$.

Máximo: $(0, 0)$

Representación:




b) $\begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f$ es continua si $x \neq 1$ porque son continuas las funciones que la definen.

En $x = 1$:

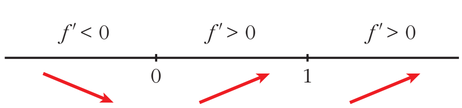
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \; f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

No es derivable en $x = 1$, porque no existe $f'(1^+)$.

$f'(x) = 0 \;\to\; 2x = 0 \;\to\; x = 0$

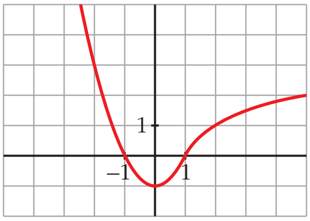
Signo de $f'$:



Crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Mínimo: $(0, -1)$

Representación:




c) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f$ es continua si $x \neq 1$, porque lo son las funciones que la definen.

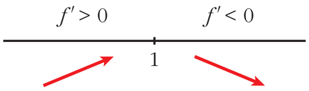
En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x} = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \ f \text{ es continua en } x = 1.$$

$f'(x) = \begin{cases} 2^x \ln 2 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ No es derivable en $x = 1$, porque $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.

No hay puntos en los que $f'(x) = 0$.

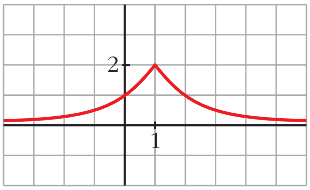
Signo de $f'$:




Crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

Máximo: $(1, 2)$ (no es derivable en ese punto).

Representación:



d) $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f$ es continua en $x \neq 1$, porque lo son las funciones que la definen.

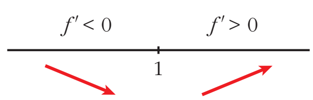
En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} e^{-x+1} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x - 2) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x), \\ f \text{ no es continua en } x = 0. \end{array}$$

$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ No existe $f'(1)$, porque $f$ es discontinua en $x = 1$.

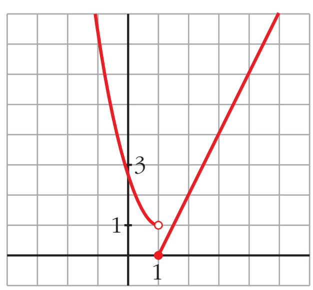
No existen puntos en los que $f'(x) = 0$.

Signo de $f'$:




Decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.

Representación:




**12** **Representa la siguiente función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \textbf{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \textbf{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

**Estudia sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, sus extremos relativos y su curvatura.**

$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Continuidad:

Si $x \neq 0$, $f$ es continua por estar definida por polinomios.

Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} x^3 - 3x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1 \\ f(0) = (0-1)^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0), \\ f \text{ es continua en } x = 0. \end{array}$$

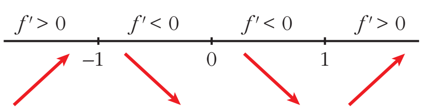
- Crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x < 0 \\ 2(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -3 \\ f'(0^+) = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Como } f'(0^-) \neq f'(0^+), \\ f \text{ no es derivable en } x = 0. \end{array}$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ \\ 2(x-1) = 0 \;\to\; x = 1;\; f(1) = 0 \end{array}$$

Signo de $f'$:



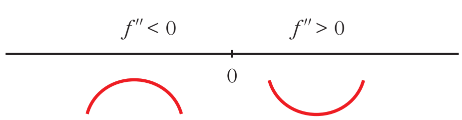

Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Decrece en $(-1, 1)$.

Máximo en $(-1, 3)$. Mínimo en $(1, 0)$.

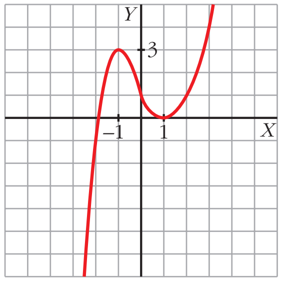
- Curvatura:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f''(0^-) = 0 \\ f''(0^+) = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f''(0^-) \neq f''(0^+). \\ \text{Por tanto, no existe } f''(0). \end{array}$$

Signo de $f''$:




Hay un punto de inflexión en $(0, 1)$.



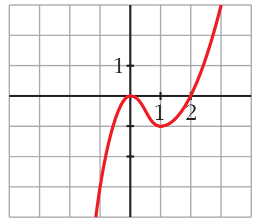
**13** **Define por intervalos y representa las siguientes funciones:**

**a)** $y = (x-2)|x|$ **b)** $y = x|x-1|$ **c)** $y = |-x^2+1|$

**d)** $y = |x^2-4x|$ **e)** $y = \dfrac{1}{|x|}$ **f)** $y = \dfrac{1}{|x-2|}$

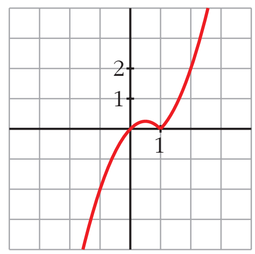
a) $y = (x-2)|x| = \begin{cases} -x^2+2x & \text{si } x < 0 \\ x^2-2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

La gráfica de la función está formada por dos ramas de parábola:

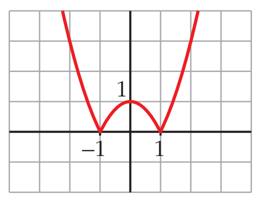



b) $y = x|x-1| = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x < 1 \\ x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

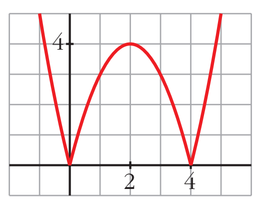
La gráfica de la función está formada por dos ramas de parábola:



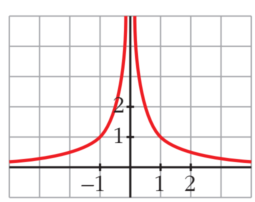

c) $y = |-x^2+1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2+1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



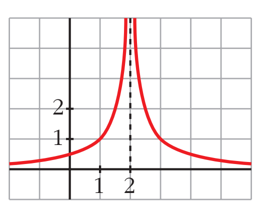

d) $y = |x^2-4x| = \begin{cases} x^2-4x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+4x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x^2-4x & \text{si } x > 4 \end{cases}$




e) $y = \dfrac{1}{|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$




f) $y = \dfrac{1}{|x-2|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$



**14** **En las funciones del ejercicio anterior, determina los máximos y los mínimos de los apartados a), b), c) y d) y las asíntotas en e) y f).**

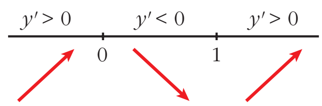
**Máximos y mínimos**

a) $y = (x-2)|x| = \begin{cases} -x^2+2x & \text{si } x<0 \\ x^2-2x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x<0 \\ 2x-2 & \text{si } x>0 \end{cases}$

No es derivable en $x = 0$.

$y' = 0 \begin{cases} -2x+2=0 \rightarrow x=1 \text{ (no vale, porque } x<0) \\ 2x-2=0 \rightarrow x=1,\ f(1)=1-2=-1 \end{cases}$

Signo de $y'$:



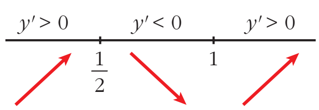

Máximo: (0, 0)
Mínimo: (1, –1)

b) $y = x|x-1| = \begin{cases} -x^2+x & \text{si } x<1 \\ x^2-x & \text{si } x \ge 1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} -2x+1 & \text{si } x<1 \\ 2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

No es derivable en $x = 1$.

$y' = 0 \begin{cases} -2x+1=0 \rightarrow x=1/2,\ f(1/2)=1/4 \\ 2x-1=0 \rightarrow x=1/2 \text{ (no vale, } x>1) \end{cases}$

Signo de $y'$:




Máximo: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

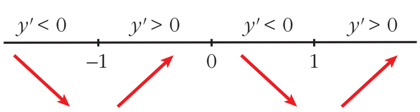
Mínimo: (1, 0)

c) $y = |-x^2+1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x<-1 \\ -x^2+1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2-1 & \text{si } x>1 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x & \text{si } x<-1 \\ -2x & \text{si } -1<x<1 \\ 2x & \text{si } x>1 \end{cases}$

No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$.

$y' = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de $y'$:



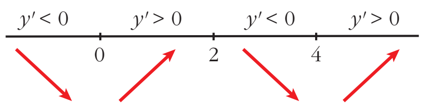

Máximo: (0, 1)
Mínimos: (–1, 0) y (1, 0)

d) $y = |x^2-4x| = \begin{cases} x^2-4x & \text{si } x<0 \\ -x^2+4x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x^2-4x & \text{si } x>4 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 2x-4 & \text{si } x<0 \\ -2x+4 & \text{si } 0<x<4 \\ 2x-4 & \text{si } x>4 \end{cases}$

No es derivable en $x = 0$, ni en $x = 4$.

$$y' = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \ \text{(no vale, } x < 0) \\ -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(2) = 4 \\ 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \ \text{(no vale, } x > 4) \end{cases}$$

Signo de $y'$:




Máximo: (2,4)

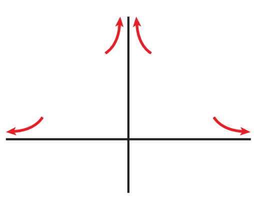
Mínimos: (0, 0) y (4, 0)

**Asíntotas**

e) $y = \dfrac{1}{|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Asíntota vertical: $x = 0$, porque $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$ con $y > 0$.

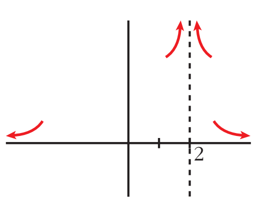
  Posición:



f) $y = \dfrac{1}{|x - 2|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Asíntota vertical: $x = 2$, porque $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x - 2|} = +\infty$.
- Asíntota horizontal: $y = 0$, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{|x - 2|} = 0$ con $y > 0$.

  Posición:



## PARA RESOLVER

**15** **Representa las siguientes funciones, estudiando:**

**— Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.**

**— Crecimiento y extremos relativos.**

**a)** $y = \dfrac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ **b)** $y = \dfrac{x}{(x - 2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{(x - 1)(x - 3)}{x - 2}$

**d)** $y = \dfrac{x^2}{9 - x^2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 4}{x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{(x - 3)^2}$

**g)** $y = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$ **h)** $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 4}$ **i)** $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

**j)** $y = \dfrac{(x - 2)^2}{x - 1}$

a) $y = \dfrac{4x - 12}{(x - 2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \; x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4(x - 2)^2 - (4x - 12) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{4(x - 2) - 2(4x - 12)}{(x - 2)^3} =$$

$$= \frac{4x - 8 - 8x + 24}{(x - 2)^3} = \frac{-4x + 16}{(x - 2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\;\to\;\; -4x + 16 = 0 \;\;\to\;\; x = 4$

Signo de $f'(x)$:

$f' < 0$ $f' > 0$ $f' < 0$

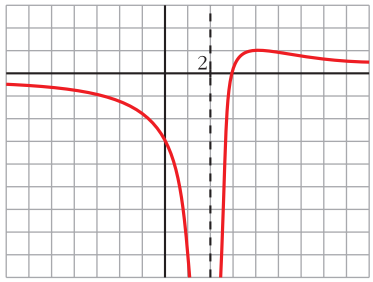
$-2$ $2$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$.

es creciente en $(2, 4)$.

tiene un máximo en $(4, 1)$.

- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 0$)

$y = 0$ es asíntota horizontal.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ es asíntota vertical.

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - x \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{x - 2 - 2x}{(x-2)^3} = \frac{-x-2}{(x-2)^3}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

Signo de $f'(x)$:

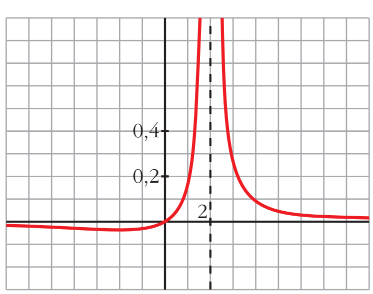
| $f' < 0$ | | $f' > 0$ | | $f' < 0$ |
|---|---|---|---|---|
| ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ |

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(-2, 2)$.

tiene un mínimo en $\left(-2, \dfrac{-1}{8}\right)$.

- **Gráfica:**



c) $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} = x-2-\dfrac{1}{x-2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{2\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 2$ es asíntota oblicua.

(si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 2$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

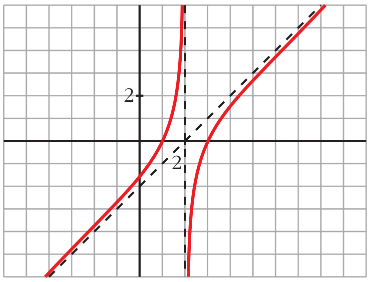
$f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; (x-2)^2 + 1 = 0 \;\to\;$ No tiene solución.

$f(x)$ no tiene extremos relativos.

$f'(x) > 0$ para todo $x \;\to\; f(x)$ es creciente en todo su dominio.

- **Gráfica:**




d) $y = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$, $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < -1$; si $x \to +\infty$, $f(x) < -1$)

$y = -1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = -3 \text{ es asíntota vertical.}$$

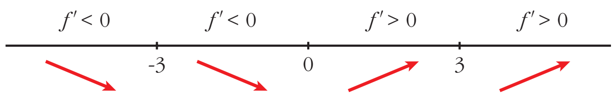
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(9 - x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x - 2x^3 + 2x^3}{(9 - x^2)^2} = \frac{18x}{(9 - x^2)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 18x = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:

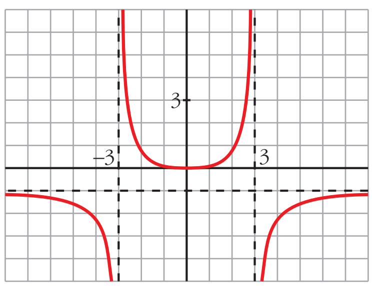



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

es creciente en $(0, 3) \cup (3, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**




e) $y = \dfrac{x^2 + 4}{x} = x + \dfrac{4}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x$ es asíntota oblicua.

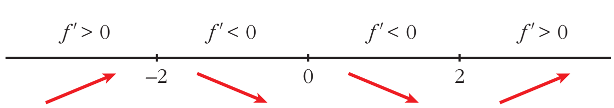
(si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < x$; si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > x$)

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2}$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; x^2 - 4 = 0 \;\; \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



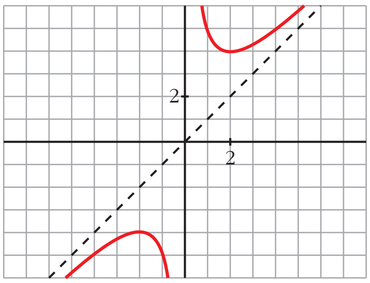
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 4)$.

- **Gráfica:**




f) $y = \dfrac{x^2}{(x-3)^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(si $x \to -\infty$, $f(x) < 1$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 1$)

$y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

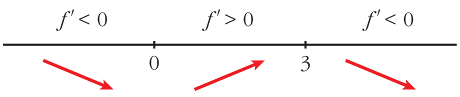
- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{2x(x-3)^2 - x^2 \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{2x(x-3) - 2x^2}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 2x^2}{(x-3)^3} = \frac{-6x}{(x-3)^3}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad -6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:

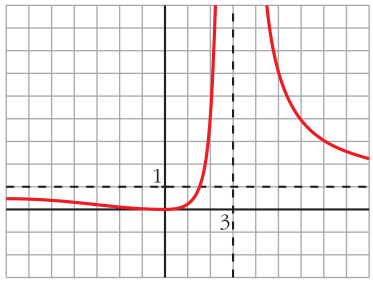



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

es creciente en $(0, 3)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**




g) $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1} = 2x - \dfrac{2x}{x^2+1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $y = 2x$ es asíntota oblicua.

  (Si $x \to -\infty$, $f(x) > 2x$; si $x \to +\infty$, $f(x) < 2x$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

  $$f'(x) = \frac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x^4 + 6x^2 - 4x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^4 + 6x^2}{(x^2+1)^2}$$

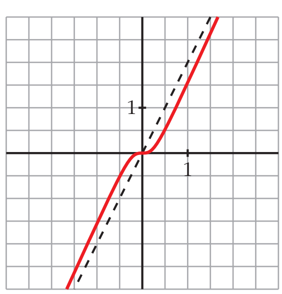
  $f'(x) = 0 \;\;\to\;\; 2x^2(x^2+3) = 0 \;\;\to\;\; x = 0$

  Signo de $f'(x)$:

  $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

  $f(x)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$.

- **Gráfica:**




h) $y = \dfrac{x^4}{x^2-4}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2-4) - x^4 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{4x^5 - 16x^3 - 2x^5}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^5 - 16x^3}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3(x^2-8)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x^3(x^2-8) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{8} \\ x = \sqrt{8} \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:

| $f' < 0$ | $-\sqrt{8}$ | $f' > 0$ | $-2$ | $f' > 0$ | $0$ | $f' < 0$ | $2$ | $f' < 0$ | $\sqrt{8}$ | $f' > 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

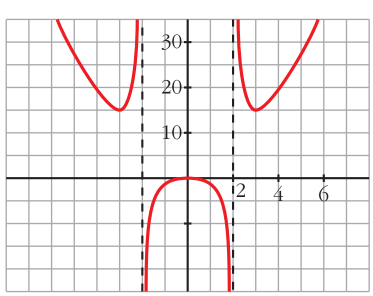
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (0, 2) \cup (2, \sqrt{8})$.

es creciente en $(-\sqrt{8}, -2) \cup (-2, 0) \cup (\sqrt{8}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-\sqrt{8}, 16)$ y otro en $(\sqrt{8}, 16)$.

tiene un máximo en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



i) $y = \dfrac{x^3}{x + 2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{-2\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \quad x = -2 \;\text{ es asíntota vertical.}$$

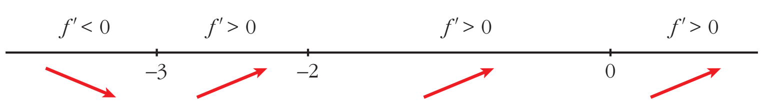
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{array}\right\} \quad \text{Ramas parabólicas}$$

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x + 2) - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{3x^3 + 6x^2 - x^3}{(x + 2)^2} = \frac{2x^3 + 6x^2}{(x + 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; 2x^2(x + 3) = 0 \;\; \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



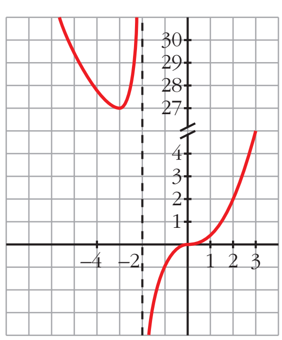

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3)$.

es creciente en $(-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(-3, 27)$.

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**



j) $y = \dfrac{(x-2)^2}{x-1} = x - 3 + \dfrac{1}{x-1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{1\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = x - 3$ es asíntota oblicua.

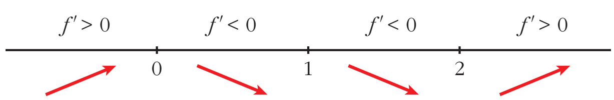
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < x - 3$; si $x \to +\infty$, $f(x) > x - 3$).

- **Crecimiento, decrecimiento, extremos relativos:**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



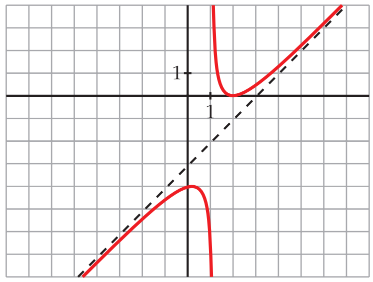

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.

tiene un máximo en $(0, -4)$.

tiene un mínimo en $(2, 0)$.

- **Gráfica:**




**s16** **a) Halla las asíntotas de la gráfica de la función definida para $x > 0$ por:**

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x}$$

**b) Halla las regiones de crecimiento y de decrecimiento de $f$ indicando sus máximos y mínimos locales y globales, si los hay.**

**c) Esboza la gráfica de $f$.**

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad \to \quad y = x$ es asíntota oblicua.

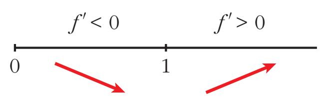
(Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$).

b) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = -1 & \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$

($x = -1$ no vale, pues $f(x)$ está definida solamente para $x > 0$).

Signo de $f'(x)$:



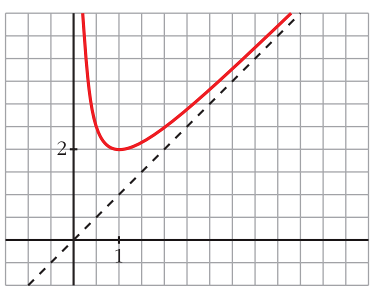

$f(x)$ es decreciente en $(0, 1)$.

es creciente en $(1, +\infty)$.

tiene un mínimo (local y global) en $(1, 2)$.

no tiene un máximo.

c)




**17** **En las siguientes funciones se pide:**

- **Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto a ellas.**
- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos.**
- **Representación gráfica.**

**a)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$ **b)** $y = \dfrac{3 - 2x}{x}$

**c)** $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

- Dominio:

  $x^2 - 2x - 3 = 0 \to x = -1, \; x = 3. \; Dom = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

- Asíntotas verticales:

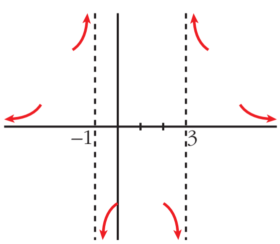
$$x = -1.\ \text{Posición}\ \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \end{cases}$$

$$x = 3.\ \text{Posición}\ \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$y = 0$, porque $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0.$

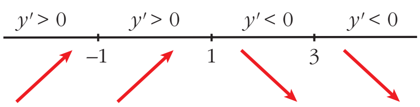
$$\text{Posición}\ \begin{cases} \text{Si}\ x \to +\infty,\ y > 0 \\ \text{Si}\ x \to -\infty,\ y > 0 \end{cases}$$




- Intervalos de crecimiento, de decrecimiento y extremos:

$$y' = \frac{-2x + 2}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \to -2x + 2 = 0 \to x = 1,\ f(1) = -\frac{1}{4}$$

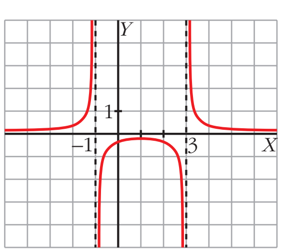
Signo de $y'$:




Máximo: $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$

Intervalos de crecimiento: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$

Intervalos de decrecimiento: $(1, 3) \cup (3, +\infty)$



b) $y = \dfrac{3-2x}{x}$

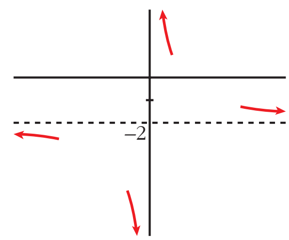
- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntotas verticales:

$x = 0$. Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3-2x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3-2x}{x} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3-2x}{x} = -2$, $y = -2$.

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \to +\infty, \ y > -2 \\ \text{Si } x \to -\infty, \ y < -2 \end{cases}$



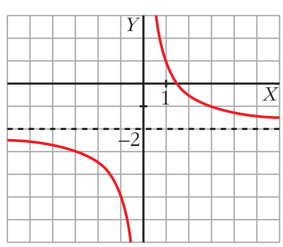

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$y' = \dfrac{-2x - (3-2x)}{x^2} = \dfrac{-3}{x^2}$

Signo de $y'$: Es negativa en todo su dominio.

La función es decreciente en su dominio.

No tiene máximos ni mínimos.




c) $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical:

$x = 0$. Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = -\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$.

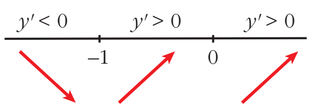
- Tampoco tiene asíntota oblicua, porque:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left( x - \frac{2}{x^2} \right) = \pm\infty$$

- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

$$y' = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 + 2}{x^2}; \quad y' = 0 \;\rightarrow\; 2x^3 + 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1, \;\; f(-1) = 3$$

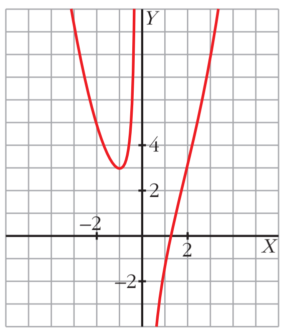
Signo de $y'$:




Mínimo: (–1, 3)

Intervalos de crecimiento: $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty, -1)$




d) $y = \dfrac{x^2}{x + 2}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$
- Asíntotas verticales: $x = -2$

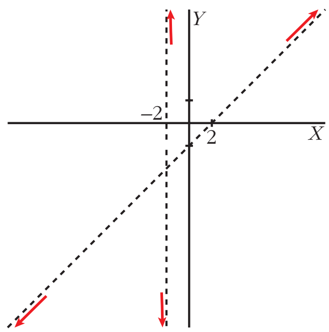
Posición
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x + 2} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x + 2} = +\infty$$

- Asíntota horizontal no tiene, porque $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x + 2} = \pm\infty$.
- Asíntota oblicua:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & x + 2 \\ \cline{2-2} -x^2 - 2x & x - 2 \\ \quad\; -2x & \\ \quad\;\; 2x + 4 & \\ \qquad\quad 4 & \end{array} \quad \rightarrow \quad y = x - 2 + \frac{4}{x + 2}$$

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua.

$$\text{Posición} \begin{cases} \text{Si } x \to +\infty, & y > x - 2 \\ \text{Si } x \to -\infty, & y < x - 2 \end{cases}$$

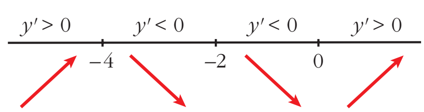



- Crecimiento y decrecimiento:

$$y' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x = 0; & y = 0 \\ x = -4; & y = -8 \end{cases}$$

Signo de $y'$:

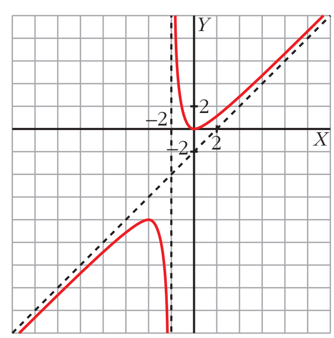



Crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

Decrece en $(-4, -2) \cup (-2, 0)$.

Máximo: $(-4, -8)$

Mínimo: $(0, 0)$




**18** **Estudia y representa las funciones siguientes:**

**a)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

**b)** $y = \dfrac{e^x}{x^2+3}$

**c)** $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

**d)** $y = \sqrt{x^2+1}$

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.

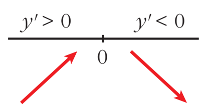
- Asíntota horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \quad (\text{con } f(x) > 0 \text{ si } x \to \pm\infty)$$

- Crecimiento:

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}; \quad y' = 0 \to -x = 0 \to x = 0, \; y = 1$$

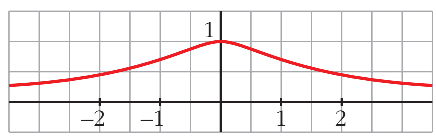
Signo de la derivada:




Crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$.

Máximo: $(0, 1)$

- Representación:




b) $y = \dfrac{e^x}{x^2+3}$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2+3} = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{rama parabólica.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2+3} = 0 \to y = 0$$ asíntota horizontal hacia $-\infty$ (con $f(x) > 0$ cuando $x \to -\infty$)

- Crecimiento:

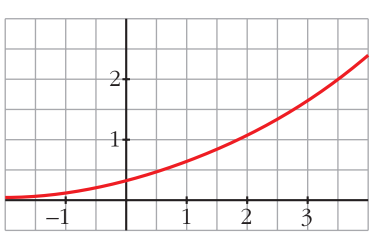
$$y' = \frac{e^x(x^2+3) + e^x \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{e^x(x^2+2x+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = 0 \to x^2 + 2x + 3 = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2}$$

No tiene solución. No hay puntos singulares.

La función es creciente en su dominio. No tiene máximos ni mínimos.

- Representación:



c) $y = x + \dfrac{4}{(x-1)^2}$

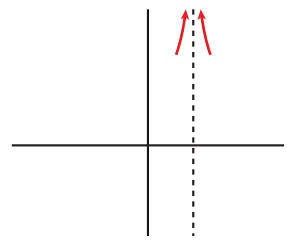
- Dominio: $\mathbb{R} - \{1\}$

$$y = \frac{x(x-1)^2 + 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 4}{(x-1)^2}$$

- Asíntota vertical: $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \left(x + \frac{4}{(x-1)^2}\right) = +\infty$$



- No tiene asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} x + \frac{4}{(x-1)^2} = \pm\infty$$

- Asíntota oblicua: $y = x$

Posición $\begin{cases} \text{Si } x \to +\infty & f(x) > x \\ \text{Si } x \to -\infty & f(x) > x \end{cases}$

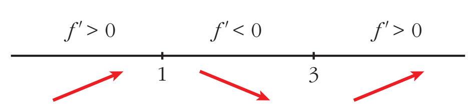
- Crecimiento:

Puntos singulares:

$$y' = 1 - \frac{8}{(x-1)^3}; \quad y' = 0 \;\to\; 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = 0 \;\to\; (x-1)^3 = 8 \;\to$$

$$\to\; x - 1 = 2 \;\to\; x = 3, \; f(3) = 4$$

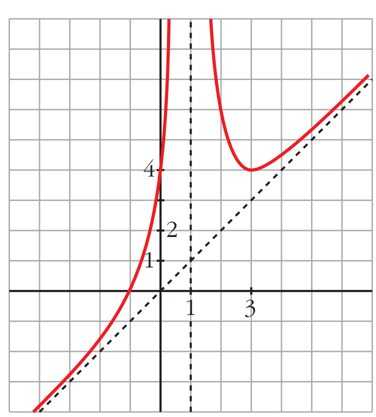
Signo de $f'$:




Crece en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y decrece en $(1, 3)$.

Mínimo: $(3, 4)$

- Representación:



d) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- Dominio: $\mathbb{R}$

- No tiene asíntotas verticales, ni horizontales.

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

$y = x$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2 + 1}}{-x} = -1$$

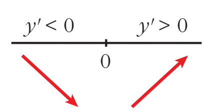
$$n = \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$$

$y = -x$ es asíntota oblicua hacia $-\infty$.

- Puntos singulares:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad y' = 0 \;\to\; x = 0, \;\; f(0) = 1$$

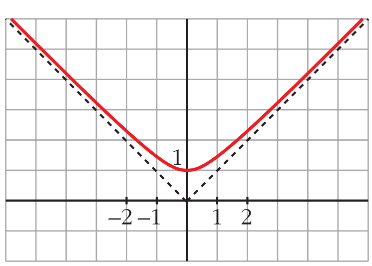
Signo de la derivada:




Crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Mínimo: $(0, 1)$.

- Representación:



## Página 206

**19** **Estudia y representa las siguientes funciones:**

**a)** $y = \sqrt{4 - x^2}$ **b)** $y = \sqrt{x^2 - x}$

**c)** $y = \sqrt[3]{x^2}$ **d)** $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

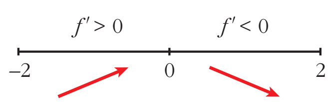
a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

- **Dominio:** $[-2, 2]$
- **Asíntotas:** no tiene.
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

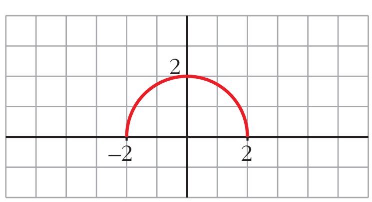
$f'(x) = 0 \;\to\; x = 0$

Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-2, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, 2)$. Tiene un máximo en $(0, 2)$.

- Corta el eje $X$ en $(-2, 0)$ y en $(2, 0)$.
- **Gráfica:**




b) $y = \sqrt{x^2 - x}$

- **Dominio:** $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + x} - x][\sqrt{x^2 + x} + x]}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{1}{2}$$

$y = -x + \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $\left(f(x) < -x + \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x} - x] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 - x} - x][\sqrt{x^2 - x} + x]}{(\sqrt{x^2 - x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \frac{-1}{2}$$

$y = x - \dfrac{1}{2}$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $\left(f(x) < x - \dfrac{1}{2}\right)$.

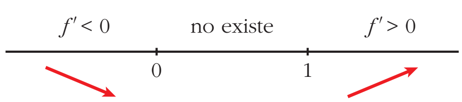
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x - 1 = 0 \quad \to \quad x = \frac{1}{2}$$

No tiene puntos singulares $\left(\text{en } x = \dfrac{1}{2} \text{ no está definida } f(x)\right)$.

Signo de $f'(x)$:

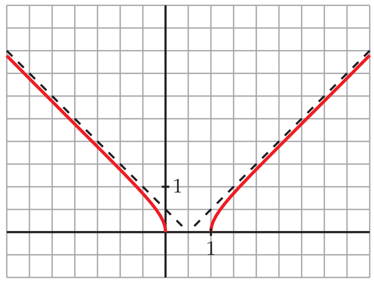



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0]$.

es creciente en $[1, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$ y $(1, 0)$.

- **Gráfica:**




c) $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Simetría:**

  $f(-x) = \sqrt[3]{x^2} = f(x)$. Es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- No tiene asíntotas.

- **Ramas infinitas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas.}$$

- **Puntos singulares:**

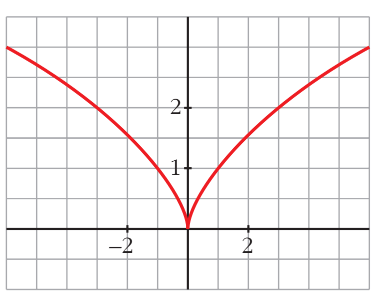
  $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

  No existe $f'(0) \to f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$.

- Pasa por $(0, 0)$.

- **Gráfica:**




d) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

- **Dominio**: $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

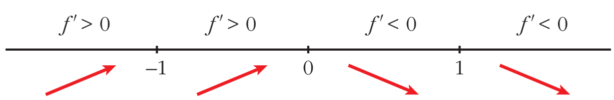
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas.}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} \rightarrow f(x) \text{ no es derivable en } x = -1 \text{ ni en } x = 1.$$

$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0$

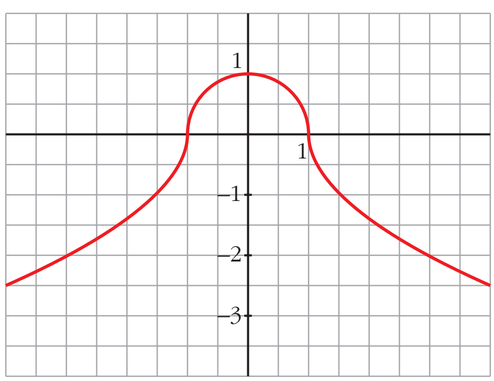
Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$, es decreciente en $(0, +\infty)$; tiene un máximo en $(0, 1)$.

- Corta al eje $X$ en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**




**20** **Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:**

**a)** $\boldsymbol{y = x + |x + 2|}$

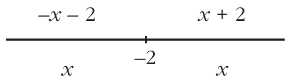
**b)** $\boldsymbol{y = 2x - |x - 3|}$

**c)** $\boldsymbol{y = |x| + |x - 3|}$

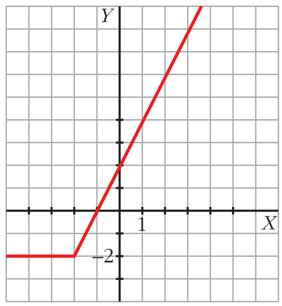
**d)** $\boldsymbol{y = x|x - 1|}$

a) $y = x + |x + 2|$

Como $|x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$, estudiamos $f$ a la izquierda y a la derecha de $-2$ para definirla por intervalos.

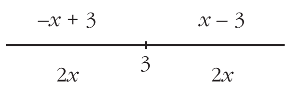



$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



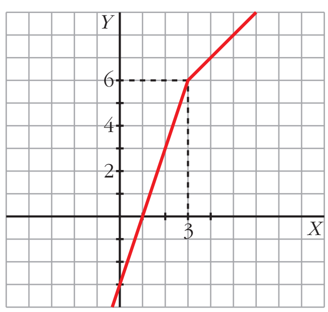

b) $y = 2x - |x - 3|$

Estudiamos la función para valores menores y mayores que 3.



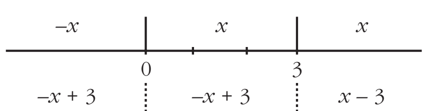

Restamos: $\begin{cases} 2x - (-x + 3) = 3x - 3 \\ 2x - (x - 3) = x + 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{si } x < 3 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$



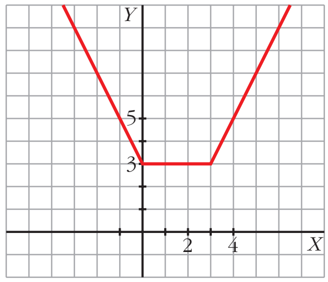

c) $y = |x| + |x - 3|$

Como $|x| = 0$ en $x = 0$ y $|x - 3| = 0$ en $x = 3$, estudiamos $f$ a la izquierda y a la derecha de esos puntos.




Sumamos: $\begin{cases} -x + (-x + 3) = -2x + 3 \\ x + (-x + 3) = 3 \\ x + \ (x - 3) = 2x - 3 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$




d) $y = x|x - 1|$

Estudiamos $f$ a la derecha y a la izquierda de $x = 1$.

$-x + 1$      $x - 1$

1

$x$      $x$

Multiplicamos: $\begin{cases} x(-x+1) = -x^2 + x \\ x(x-1) = x^2 - x \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- $y = -x^2 + x$ es una parábola abierta hacia abajo:

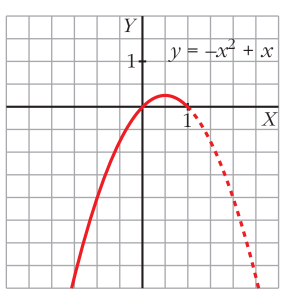
  Vértice: $-2x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$

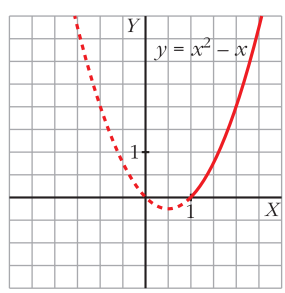
  Cortes con $OX$: $-x^2 + x = 0 \rightarrow x(-x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0, \ x = 1$

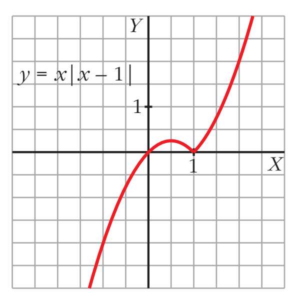
- $y = x^2 - x$ es una parábola abierta hacia arriba:

  Vértice: $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ (no vale, ya que debe ser $x \geq 1$)

  Cortes con $OX$: $x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0$ $\begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = 1 \end{cases}$




**21** **Representa gráficamente:**

**a)** $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

**b)** $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

a) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$

Definimos la función por intervalos: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{-x - 2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{1}{-x - 2} = \dfrac{-1}{x + 2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-2\}$

- Asíntota vertical:

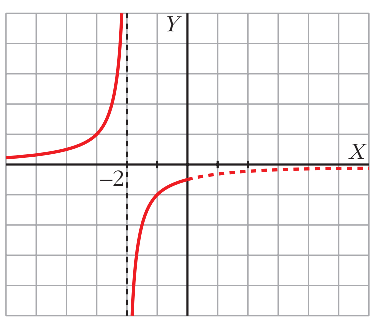
$$\lim_{x \to -2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < -2, & f(x) \to +\infty \\ \text{Si } x > -2, & f(x) \to -\infty \end{cases}$$

$x = -2$ es una asíntota vertical.

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{x + 2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(f(x) > 0)$.




Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{1}{x - 2}$:

- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$

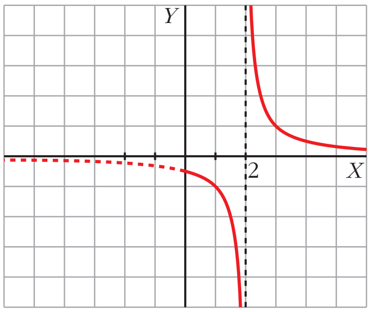
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \text{Si } x < 2, & f(x) \to -\infty \\ \text{Si } x > 2, & f(x) \to +\infty \end{cases}$$

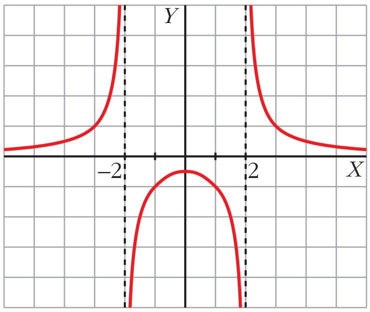
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 2} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(f(x) > 0)$.




La gráfica de $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$ es:




b) $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$

Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\[2mm] \dfrac{2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$, $y = \dfrac{-2x}{x^2 + 1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0$$

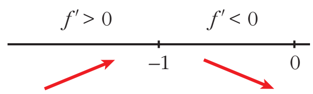
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

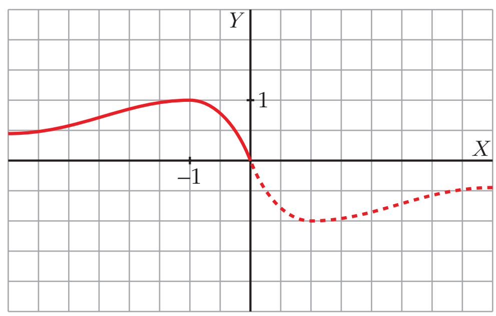
$$f'(x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2 + 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2x^2 - 2}{(x^2+1)^2} = 0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x = 1 \;\;\text{(no vale, } 1 > 0\text{)} \\ x = -1, \;\; f(-1) = 1 \end{array}$$

Signo de $f'$:




Máximo en (–1, 1).




Si $x \geq 0$, $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

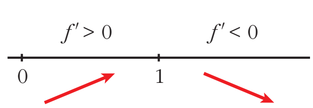
$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ ($y > 0$).

- Puntos singulares:

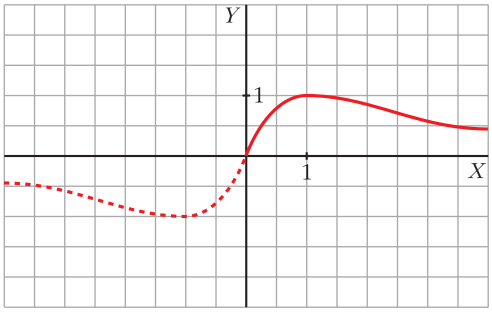
$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x^2 + 2 = 0 \;\Big\langle\; \begin{array}{l} x = -1 \;\;\text{(no vale, } -1 < 0\text{)} \\ x = 1, \;\; f(1) = 1 \end{array}$$

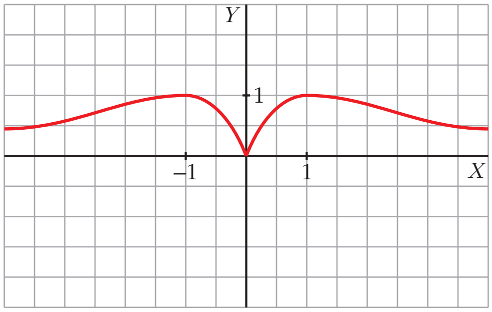
Signo de $f'$:




Máximo en (1, 1).




La gráfica de $y = \dfrac{|2x|}{x^2 + 1}$ es:




**s22** **Considera la función $f(x) = x^2|x - 3|$:**

**a) Halla los puntos donde $f$ no es derivable.**

**b) Calcula sus máximos y mínimos.**

**c) Represéntala gráficamente.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2(-x+3) & \text{si } x < 3 \\ x^2(x-3) & \text{si } x \geq 3 \end{cases} = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 & \text{si } x < 3 \\ x^3 - 3x^2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

**Si $x \neq 3$,** tenemos que $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x & \text{si } x < 3 \\ 3x^2 - 6x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -9 \\ f'(3^+) = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f'(3^-) \neq f'(3^+) \\ f(x) \text{ no es derivable en } x = 3 \; \big(\text{Punto } (3, 0)\big). \end{array}$$

b) $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -3x^2 + 6x = 0$ si $x < 3$

$$3x(-x+2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \;\rightarrow\; (0, 0) \\ x = 2 \;\rightarrow\; (2, 4) \end{array}\right.$$

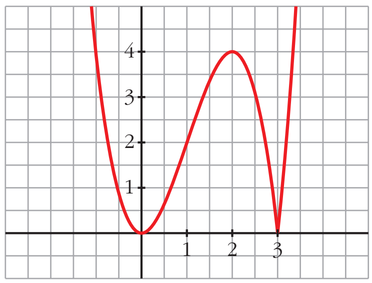
$3x^2 - 6x = 0$ si $x > 3$ $\rightarrow$ ninguno

Como $f(x) \geq 0$ para todo $x$, tenemos que:

$f(x)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(3, 0)$, y tiene un máximo en $(2, 4)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Uniendo todo lo anterior, llegamos a la gráfica:




**s23** **La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - k}$.**

**Halla el valor de $k$ y representa la función así obtenida.**

- **Hallamos $k$:**

Si $y = 2x + 6$ es asíntota oblicua, tenemos que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2; \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = 6$$

Por tanto:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - kx} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 + 1}{x - k} - 2x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2 + 2kx}{x - k} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2kx + 1}{x - k} = 2k = 6 \quad \to \quad k = 3$$

También podríamos efectuar la división:

$$\begin{array}{ll|l}
2x^2 + 1 & & x - k \\
\cline{3-3}
-2x^2 + 2kx & & 2x + 2k \\
\phantom{-2x^2 +{}} 2kx + 1 & & \\
\phantom{-2x^2}-2kx + 2k^2 & & \\
\phantom{-2x^2 + 2kx}1 + 2k^2 & &
\end{array}$$

La asíntota oblicua es $y = 2x + 2k$.

$2x + 2k = 2x + 6 \;\to\; 2k = 6 \;\to\; k = 3$

Por tanto, $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 3}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{3\}$

- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad x = 3 \text{ es asíntota vertical.}$$

$y = 2x + 6$ es asíntota oblicua.

(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 6$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 6$)

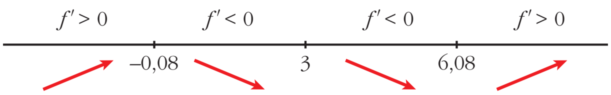
- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{4x(x-3) - (2x^2+1)}{(x-3)^2} = \frac{4x^2 - 12x - 2x^2 - 1}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 12x - 1}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x^2 - 12x - 1 = 0 \quad \to$$

$$\to \quad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 8}}{4} \begin{cases} x = 6{,}08, \;\; f(6{,}08) = 24{,}32 \\ x = -0{,}08, \;\; f(-0{,}08) = -0{,}33 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



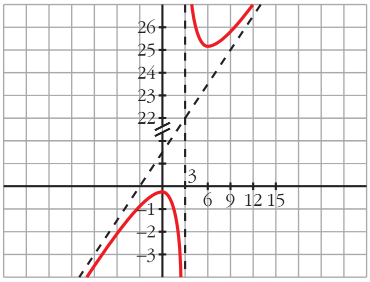

$f(x)$ es creciente en $(-\infty; -0{,}08) \cup (6{,}08; +\infty)$.

es decreciente en $(-0{,}08; 3) \cup (3; 6{,}08)$.

tiene un máximo en $(-0{,}08; -0{,}33)$.

tiene un mínimo en $(6{,}08; 24{,}32)$.

- **Gráfica:**



**s24** **Considera la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$$

**En el intervalo $(-\infty, 0]$, estudia la existencia de puntos de corte con los ejes, si la función crece o decrece, la existencia de puntos de inflexión y si tiene asíntotas. Dibuja la gráfica en todo $\mathbb{R}$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} & \text{si } x < 0 \\ -x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Si $x \in (-\infty, 0)$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

  Si $x = 0$, $y = -x + 1 = 1$

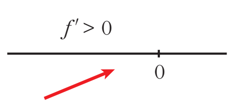
  Cortes con los ejes: $x = 0$, $y = 1 \rightarrow (0, 1)$

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ No tiene solución. No corta a $Y$.

- Crecimiento y decrecimiento:

  $$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2};\quad \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0,\ f(0) = 1$$

  Signo de $f'(x)$:

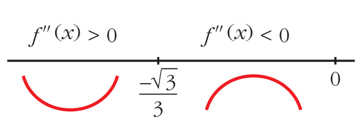



  La función es creciente.

- Puntos de inflexión:

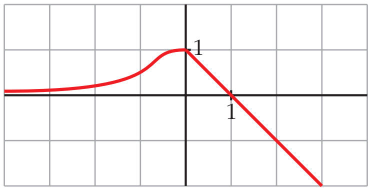
  $$f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3};\quad \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ (no vale)} \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

  Signo de $f''(x)$:




  Punto de inflexión: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right) \simeq (-0{,}58;\ 0{,}75)$

- Representación:




**25** **Dada la función $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$, calcula $a$ y $b$ para que la gráfica de $f$ pase por el punto (–2, –6) y tenga, en ese punto, tangente horizontal. Para esos valores de $a$ y $b$, representa la función.**

$f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$; $f'(x) = a - \dfrac{8}{x^2}$

- Pasa por $(-2, -6)$, $f(-2) = -6 \to -2a + b - 4 = -6$
- Tangente horizontal $\to f'(-2) = 0 \to a - 2 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -2a + b = -2 \\ a = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \end{array}$$

Para estos valores, queda: $f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Asíntotas:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$f(x) = 2x + 2 + \dfrac{8}{x} \to y = 2x + 2$ es asíntota oblicua.

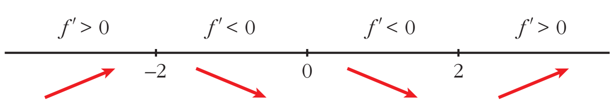
(Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2x + 2$; si $x \to +\infty$, $f(x) > 2x + 2$)

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = 2 - \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to 2x^2 - 8 = 0 \to x^2 = 4 \;\begin{array}{l} x = -2, \; f(-2) = -6 \\ x = 2, \; f(2) = 10 \end{array}$

Signo de $f'(x)$:



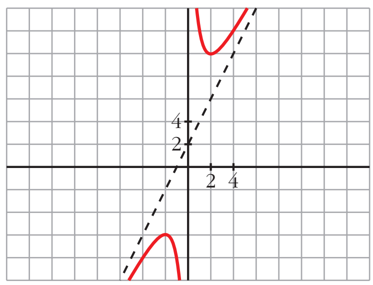
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

es decreciente en $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

tiene un máximo en $(-2, -6)$.

tiene un mínimo en $(2, 10)$.

- **Gráfica:**




**26** **Representa las siguientes funciones:**

**a)** $y = \dfrac{x}{e^x}$ **b)** $y = \dfrac{ln\ x}{x}$

**c)** $y = x\ ln\ x$ **d)** $y = (x-1)e^x$

**e)** $y = e^{-x^2}$ **f)** $y = x^2 e^{-x}$

**g)** $y = \dfrac{x^3}{ln\ x}$ **h)** $y = ln(x^2-1)$

a) $y = \dfrac{x}{e^x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$ (ya que $e^x \neq 0$ para todo $x$).
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 1 - x = 0 \quad \to \quad x = 1$

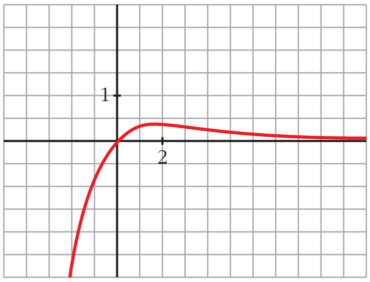
Signo de $f'(x)$: $f' > 0$ | 1 | $f' < 0$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta a los ejes en el punto $(0, 0)$.
- **Gráfica:**




b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \quad \to \quad x = 0$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

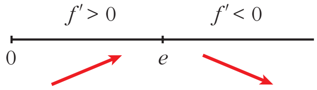
$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 0)$.

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = \dfrac{(1/x) \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = 1 \quad \to \quad x = e$

Signo de $f'(x)$:



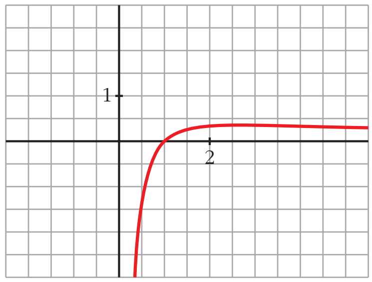

$f(x)$ es creciente en $(0, e)$.

es decreciente en $(e, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje $X$ en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**




c) $y = x \ln x$

- **Dominio:** $(0, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = 0$$

No tiene asíntotas verticales.

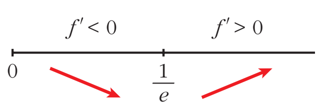
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad \ln x = -1 \quad \to \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Signo de $f'(x)$:



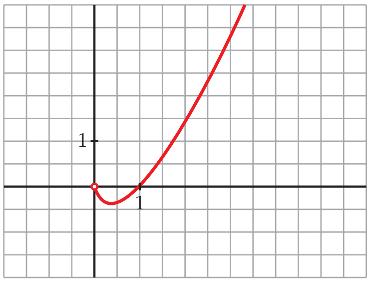

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

es creciente en $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

- Corta al eje $X$ en $(1, 0)$.

- **Gráfica:**




d) $y = (x - 1)e^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x - 1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

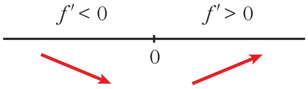
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \to \quad \text{Rama parabólica}$$

- **Puntos singulares:**

$f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

es creciente en $(0, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(0, -1)$.

- Corta al eje $X$ en $(1, 0)$.
- **Gráfica:**

e) $y = e^{-x^2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

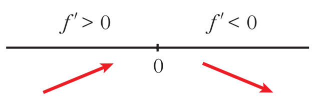
  $y = 0$ es asíntota horizontal ($f(x) > 0$ para todo $x$).

- **Puntos singulares:**

  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

  Signo de $f'(x)$:

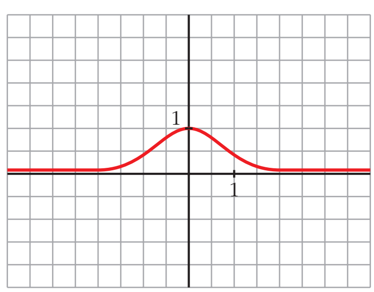



  $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

  es decreciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica:**




f) $y = x^2 e^{-x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty \;\rightarrow\;$ Rama parabólica

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 0$

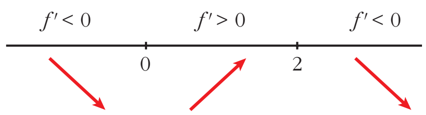
  $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ ($f(x) > 0$).

- **Puntos singulares:** $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{e^x} = \frac{e^x\,(2x - x^2)}{e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - x^2 = 0 \;\to\; x(2 - x) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:



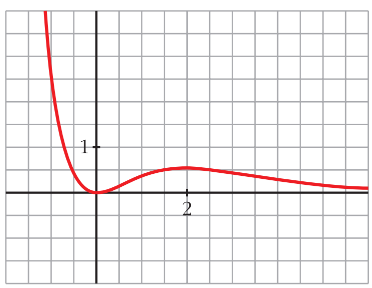

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

es creciente en $(0, 2)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$.

tiene un máximo en $\left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$.

- **Gráfica:**




g) $y = \dfrac{x^3}{\ln x}$

- **Dominio:**

$\ln x = 0 \;\to\; x = 1$. Además, ha de ser $x > 0$.

$Dom = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \; x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

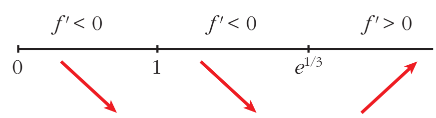
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \;\to\;$ Rama parabólica

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{3x^2\ ln\,x - x^3 \cdot (1/x)}{(ln\,x)^2} = \frac{3x^2\ ln\,x - x^2}{(ln\,x)^2} = \frac{x^2(3\,ln\,x - 1)}{(ln\,x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(3ln\,x - 1) = 0 \;\left\langle\; \begin{array}{l} x = 0 \;\; \text{(no vale)} \\ ln\,x = 1/3 \;\rightarrow\; x = e^{1/3} \end{array}\right.$$

Signo de $f'(x)$:

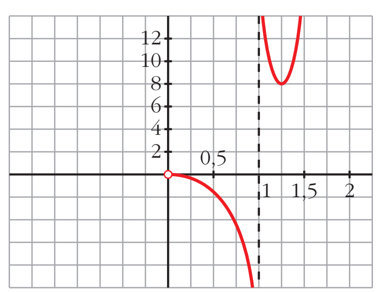



$f(x)$ es decreciente en $(0, 1) \cup (1, e^{1/3})$.

es creciente en $(e^{1/3}, +\infty)$.

tiene un mínimo en $(e^{1/3}, 3e)$.

- **Gráfica:**




h) $y = ln(x^2 - 1)$

- **Dominio:** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- **Asíntotas:**

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = -1$ es asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \;\rightarrow\; x = 1$ es asíntota vertical.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \;\; \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \;\; \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\}\ \text{Ramas parabólicas}$$

- **Puntos singulares:**

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

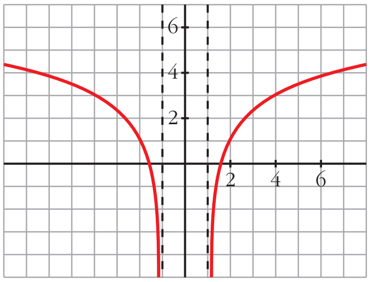
No hay puntos singulares ($x = 0$ no pertenece al dominio).

- **Puntos de corte con el eje $X$:**

$ln(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$

Puntos: $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 0\right)$

- **Gráfica:**




**27** **Estudia los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y represéntalas gráficamente:**

**a)** $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$

**b)** $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$

a) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = senh\ x$. Esta función se denomina seno hiperbólico de $x$.

- $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow e^x + e^{-x} = 0 \rightarrow$ no tiene solución $\rightarrow$

$\rightarrow$ no hay máximos ni mínimos

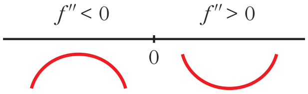
$f'(x) > 0$ para todo $x \rightarrow f(x)$ es creciente

- $f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f''(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^x - \dfrac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow$

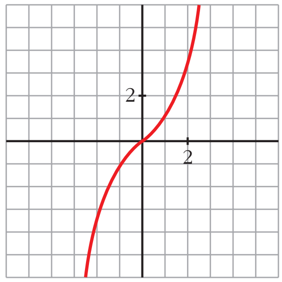
$\rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$

Signo de $f''(x)$:




Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$.

- **Gráfica:**

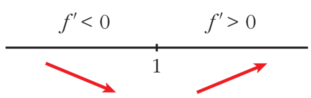



b) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = cosh\ x$. Esta función se denomina coseno hiperbólico de $x$.

- $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

  $f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x - e^{-x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$

  Signo de $f'(x)$:

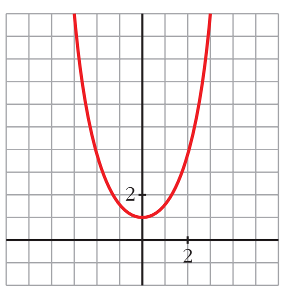



Hay un mínimo en $(0, 1)$.

- $f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

  $f''(x) = 0 \;\rightarrow\;$ No tiene solución. $\rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

- **Gráfica:**




**28** **Halla los valores de $a$, $b$ y $c$ para los cuales la función:**

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4}$$

**tiene como asíntota horizontal la recta $y = -1$ y un mínimo en (0, 1).**

Si $y = -1$ es asíntota horizontal, debe ser:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -1 \;\rightarrow\; \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = a = -1 \;\rightarrow\; a = -1$$

Para que tenga un mínimo en (0, 1), debe ser $f'(0) = 0$ y $f(0) = 1$:

$$f'(x) = \frac{(2ax + b)(x^2 - 4) - 2x(ax^2 + bx + c)}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f'(0) = \frac{-4b}{16} = 0 \;\rightarrow\; -\frac{b}{4} = 0 \;\rightarrow\; b = 0$$

$$f(0) = 1 \;\rightarrow\; \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 4} = 1 \;\rightarrow\; \frac{c}{-4} = 1 \;\rightarrow\; c = -4$$

Por tanto: $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4}{x^2 - 4}$

**29** **Estudia el dominio de definición, las asíntotas y los extremos de cada una de las siguientes funciones y, con esa información, trata de encontrar su gráfica entre las siguientes:**

**a)** $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

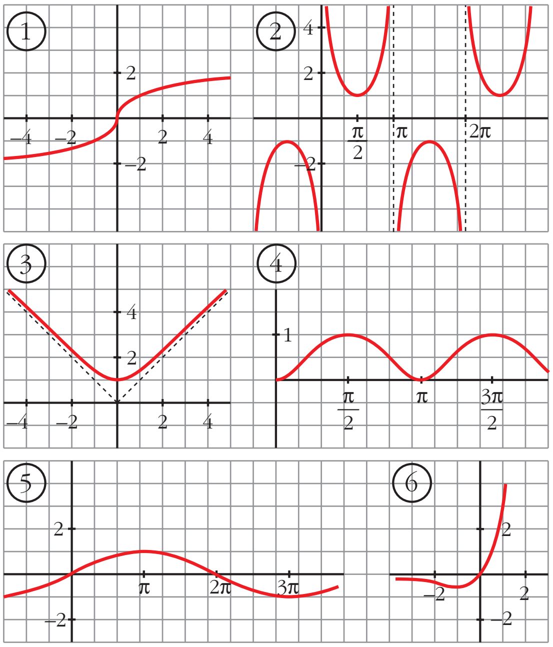
**b)** $y = x\,e^{x}$

**c)** $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

**d)** $y = \sqrt[3]{x}$

**e)** $y = \sqrt{x^2 + 1}$

**f)** $y = sen^2\ x$




a) $y = \dfrac{1}{sen\ x}$

- **Dominio:**

  $sen\ x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 + \pi k;\;\; k \in \mathbb{Z}$

  $D = \mathbb{R} - \{\pi k\},\;\; k \in \mathbb{Z}$

- **Asíntotas:**

  $x = \pi k,\;\; k \in \mathbb{Z}$ son asíntotas verticales.

  No hay más asíntotas.

- **Extremos:**

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{sen^2\, x}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \pi/2 + 2\pi k \\ x = 3\pi/2 + 2\pi k \end{array} \right\} \;(k \in \mathbb{Z})$$

Signo de $f'(x)$ en $(0, 2\pi)$:

| $0$ | $f' < 0$ ↘ | $\frac{\pi}{2}$ | $f' > 0$ ↗ | $\pi$ | $f' > 0$ ↗ | $\frac{3\pi}{2}$ | $f' < 0$ ↘ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$f(x)$ es periódica de período $2\pi$.

$f(x)$ es decreciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

es creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

tiene un mínimo en $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 2

b) $y = xe^x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$

- **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{e^x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) < 0)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \;\;\rightarrow\;\; \text{Rama parabólica}$$

- **Extremos:**

$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 1 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -1$

Signo de $f'(x)$:

| $f' < 0$ ↘ | $-1$ | $f' > 0$ ↗ |
|---|---|---|

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1)$.

es creciente en $(-1, +\infty)$.

tiene un mínimo en $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 6

c) $y = sen\ \dfrac{x}{2}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\ cos\ \dfrac{x}{2}$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ cos\ \dfrac{x}{2} = 0 \ \rightarrow\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k \ \rightarrow\ x = \pi + 2\pi k$

$f(x)$ es periódica de período $4\pi$.

Signo de $f'(x)$:

| $f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' > 0$ |
|---|---|---|
| $0$ — $\pi$ ↗ | $\pi$ — $3\pi$ ↘ | $3\pi$ — $4\pi$ ↗ |

$f(x)$ es creciente en $(0, \pi) \cup (3\pi, 4\pi)$.

es decreciente en $(\pi, 3\pi)$.

tiene un máximo en $(\pi, 1)$.

tiene un mínimo en $(3\pi, -1)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 5

d) $y = \sqrt[3]{x}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.

$$\left.\begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; & \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; & \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \end{array}\right\} \text{ Ramas parabólicas}$$

- **Extremos:**

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \ \rightarrow\ f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

$f(x)$ es creciente.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 1

e) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Simetría:**

  $f(-x) = f(x) \rightarrow f(x)$ es par: simétrica respecto al eje $Y$.

- **Asíntotas:**

  No tiene asíntotas verticales.

  $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

  $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$$

  $$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 + 1} - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

  $$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

  $y = x$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > x)$.

  Por simetría:

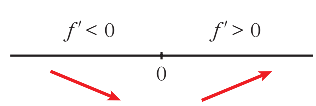
  $y = -x$ es asíntota oblicua cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -x)$.

- **Extremos:**

  $$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

  $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$

  Signo de $f'(x)$:




  $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.

  es creciente en $(0, +\infty)$.

  tiene un mínimo en $(0, 1)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 3

f) $y = sen^2\, x$

- **Dominio:** $\mathbb{R}$
- **Asíntotas:** No tiene.
- **Extremos:**

  $f'(x) = 2\, sen\, x\, cos\, x = sen\, 2x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\ 2x = 0 \;\rightarrow\; 2x = 0 + \pi k \;\rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{2}k, \;\; k \in \mathbb{Z}$

$f(x)$ es periódica de período $\pi$.

Signo de $f'(x)$ en $(0, \pi)$:

$$\begin{array}{ccccc} & f' > 0 & & f' < 0 & \\ 0 & \nearrow & \dfrac{\pi}{2} & \searrow & \pi \end{array}$$

$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

tiene un mínimo en $(0, 0)$ y otro en $(\pi, 0)$.

- **Gráfica** $\rightarrow$ 4

**30** **Halla los puntos de corte con los ejes, los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones definidas en el intervalo [0, 2π], y represéntalas:**

**a)** $y = 1 - 2cos\ x$

**b)** $y = 1 + 2sen\ x$

**c)** $y = sen\ x - cos\ x$

**d)** $y = sen\ x + cos\ x$

a) $y = 1 - 2cos\ x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 - 2cos\ x = 0 \rightarrow cos\ x = \dfrac{1}{2} \rightarrow$

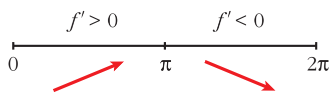
$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \text{Puntos } \left(\dfrac{\pi}{3}, 0\right) \text{ y } \left(\dfrac{5\pi}{3}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2sen\ x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; sen\ x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases}$$

Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, \pi)$ y es decreciente en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.

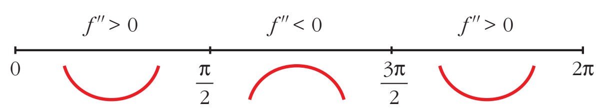
Tiene un máximo en $(\pi, 3)$, un mínimo en $(0, -1)$ y otro mínimo en $(2\pi, -1)$.

- **Puntos de inflexión:**

  $f''(x) = 2cos\ x$

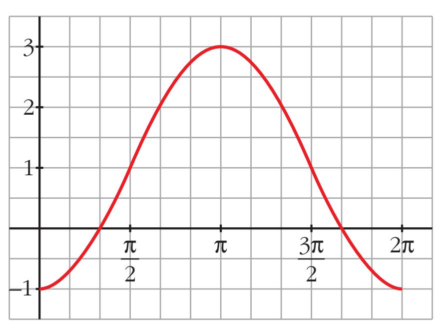
  $f''(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right.$

  Signo de $f''(x)$:




  Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ y $\left(\dfrac{3\pi}{2}, 1\right)$

- **Gráfica:**




b) $y = 1 + 2sen\ x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (está solo definida en este intervalo).
- **Cortes con los ejes:**

  — Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow$ Punto $(0, 1)$

  — Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow 1 + 2sen\ x = 0 \rightarrow sen\ x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow$

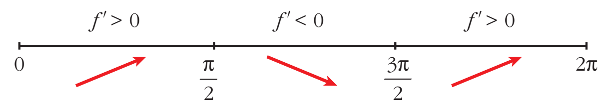
  $\left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{6} \\ x = \dfrac{11\pi}{6} \end{array} \right\}$ Puntos $\left(\dfrac{7\pi}{6}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{11\pi}{6}, 0\right)$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = 2\cos x$

$$f'(x) = 0 \;\to\; \cos x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es creciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

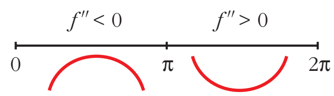
Tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$, y un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -2\,sen\,x$

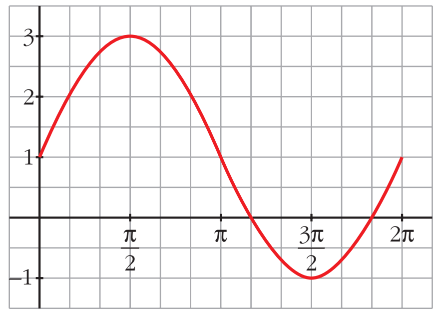
$$f''(x) = 0 \;\to\; sen\,x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{array} \right.$$

Signo de $f''(x)$:




Puntos de inflexión en $(0, 1)$, $(\pi, 1)$ y en $(2\pi, 1)$.

- **Gráfica:**




c) $y = sen\,x - \cos x$

- **Dominio:** $[0, 2\pi]$ (nos la definen en este intervalo).

- **Cortes con los ejes:**

— Con el eje $Y \to x = 0 \to y = -1 \to$ Punto $(0, -1)$

— Con el eje $X \rightarrow y = 0 \rightarrow sen\ x - cos\ x = 0$

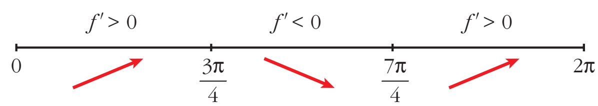
$$tg\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right\} \text{ Puntos } \left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

- **Máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento:**

$f'(x) = cos\ x + sen\ x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x + sen\ x = 0 \rightarrow 1 + tg\ x = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:




$f(x)$ es creciente en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ y decreciente en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

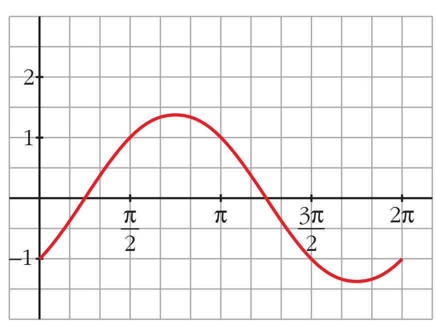
Tiene un máximo en $\left(\frac{3\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, y un mínimo en $\left(\frac{7\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -sen\ x + cos\ x = -(sen\ x - cos\ x) = -f(x)$

Los puntos de inflexión son los puntos de corte con el eje $X$.

- **Gráfica:**

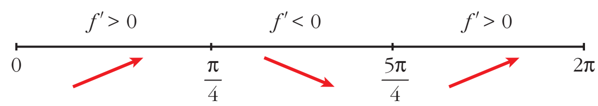



d) $y = sen\ x + cos\ x$ para $0 \le x \le 2\pi$

- $f'(x) = cos\ x - sen\ x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = sen\ x \rightarrow tg\ x = 1 \left\langle \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} \end{array} \right.$$

Signo de $f'(x)$:



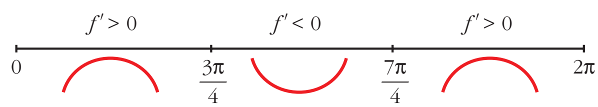

Hay un máximo en $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, y un mínimo en $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

- **Puntos de inflexión:**

$f''(x) = -sen\ x - cos\ x$

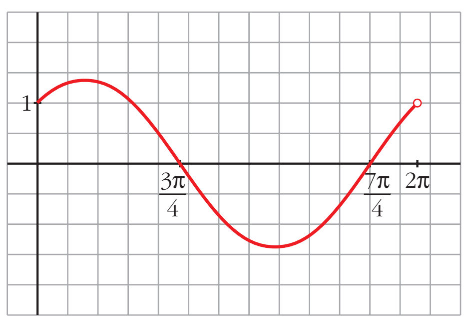
$$f''(x) = 0 \rightarrow sen\ x = -\cos x \rightarrow tg\ x = -1 \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} \\ x = \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

Signo de $f''(x)$:




Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y otro en $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$.

- **Gráfica:**




## Página 207

### CUESTIONES TEÓRICAS

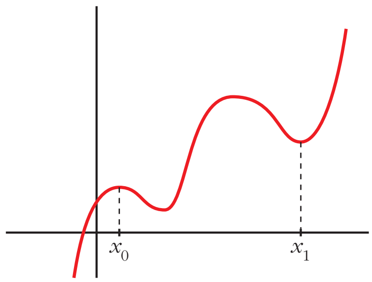
**31** **¿Qué podemos decir del grado de una función polinómica que tiene dos máximos y dos mínimos relativos?**

**En esa función, ¿puede estar uno de los mínimos más alto que el máximo?**

- Si tiene dos máximos y dos mínimos relativos, y es polinómica, su derivada tiene, al menos, cuatro raíces; es decir, $f'(x)$ será, al menos, de grado 4.

  Por tanto, $f(x)$ será, al menos, de grado 5.

- Sí, podría haber un mínimo más alto que un máximo. Por ejemplo:




El mínimo de $x_1$ está más alto que el máximo de $x_0$.

**32** **¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de cuarto grado?**

Si $f(x)$ es un polinomio de cuarto grado, $f'(x)$ será un polinomio de tercer grado y $f''(x)$ será un polinomio de segundo grado.

Así, $f''(x)$ tendrá, a lo sumo, dos raíces.

Por tanto, $f(x)$ tendrá, como máximo, dos puntos de inflexión.

**33** **Comprueba que la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ tiene dos asíntotas horizontales distintas.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.

**34** **La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ no está definida en $x = 1$ ni en $x = -1$; sin embargo, tiene solo una asíntota vertical. Justifica esta información.**

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

En $x = -1$ hay una discontinuidad evitable, no hay una asíntota.

**35** **¿Cuántas asíntotas verticales puede tener una función? ¿Y horizontales?**

- Asíntotas verticales puede tener infinitas. (Como ejemplo, podemos considerar la función $y = \dfrac{1}{sen\ x}$, cuya gráfica está representada en el ejercicio 17, en la gráfica 2).
- Asíntotas horizontales puede tener, como máximo, dos: una cuando $x \to -\infty$ y otra cuando $x \to +\infty$.

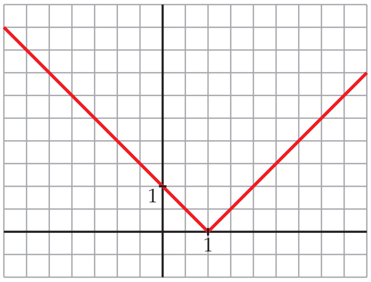
**s36** **Da un ejemplo de una función que tenga un mínimo en $x = 1$ y que no sea derivable en ese punto. Represéntala.**

$$y = |x-1| = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 0 \\ f(x) > 0 \text{ para } x \neq 1 \end{array}\right\} \to \text{ Hay un mínimo en } x = 1, \text{ en } (1, 0).$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$, pues $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = 1$.

La gráfica es:




**s37** **Da un ejemplo de una función que sea derivable en $x = 1$ con $f'(1) = 0$ y que no tenga máximo ni mínimo en ese punto.**

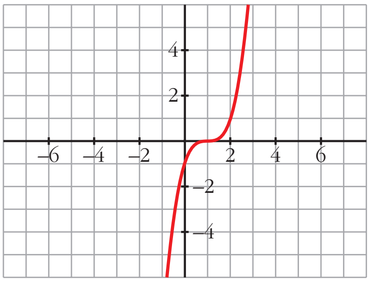
Por ejemplo, $y = (x-1)^3$.

$f'(x) = 3(x-1)^2 \to f'(1) = 0$

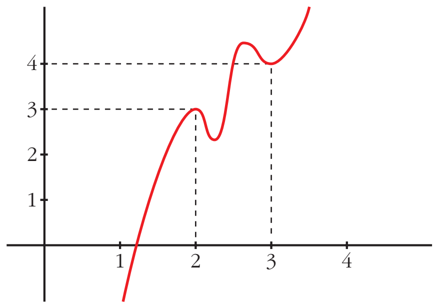
$f'(x) > 0$ para $x \neq 1 \to f(x)$ es creciente.

En $x = 1$ hay un punto de inflexión.

La gráfica es:



**s38** **Si es posible, dibuja una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4). Si la función fuera polinómica, ¿cuál habría de ser, como mínimo, su grado?**




$f(x)$ debe tener, al menos, dos máximos y dos mínimos en $[0, 4]$, si es derivable.

Si $f(x)$ fuera un polinomio, tendría, como mínimo, grado 5 (pues $f'(x)$ se anularía, al menos, en cuatro puntos).

## PARA PROFUNDIZAR

**s39** **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$, **se pide:**

**a) Dominio de definición, asíntotas y posición de la curva respecto de estas.**

**b) Máximos y mínimos relativos, e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

**c) Dibuja la gráfica de** $f$.

a) • **Dominio:** $\mathbb{R}$ (porque $x^2 + 1 > 0$ para todo $x$).

• **Asíntotas:**

No tiene asíntotas verticales, porque el denominador no se anula para ningún valor de $x$.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$$

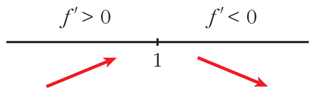
$y = -1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ $(f(x) > -1)$.

$y = 1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$ $(f(x) > 1)$.

b) $$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x^2+1)} = \frac{x^2+1-x^2-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

Signo de $f'(x)$:

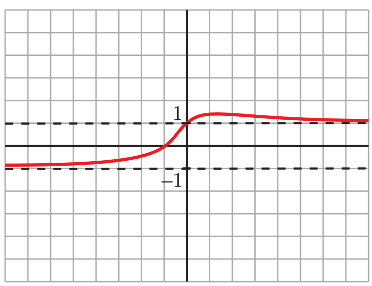



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$.

es decreciente en $(1, +\infty)$.

tiene un máximo en $\left(1, \sqrt{2}\right)$.

c)




**40** **Determina las asíntotas de estas funciones:**

**a)** $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}$ **b)** $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{x}$

a) $y = \dfrac{\sqrt{1-x}}{3x}$

Dominio: $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$

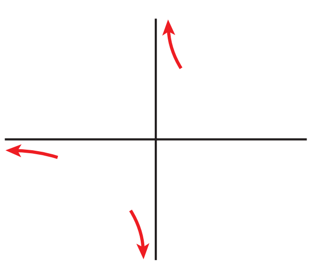
- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = \pm\infty \begin{cases} \text{Si } x < 0 & y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 & y \to +\infty \end{cases}$$

- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{3x} = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$



b) $y = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \pm\infty \quad \begin{cases} \text{Si } x < 0 \quad y \to -\infty \\ \text{Si } x > 0 \quad y \to +\infty \end{cases}$$

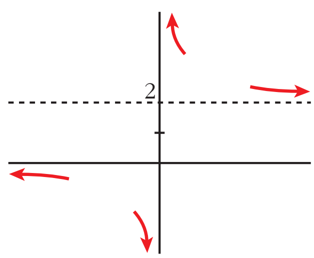
- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$$

$y = 2$ es asíntota horizontal hacia $+\infty$ $(y > 2)$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + \sqrt{x^2 + 1}}{-x} = 1 - 1 = 0$$

$y = 0$ es asíntota horizontal hacia $-\infty$ $(y < 0)$.




## Página 207

## AUTOEVALUACIÓN

**1. Se considera la función $f(x) = x^3 + 2x + 4$. ¿Tiene máximos y/o mínimos? ¿Tiene algún punto de inflexión? Estudia su curvatura y represéntala.**

$f(x) = x^3 + 2x + 4$

- $f'(x) = 3x^2 + 2$

  $f'(x) = 0 \quad \to \quad 3x^2 = -2 \quad \to$ no tiene solución.

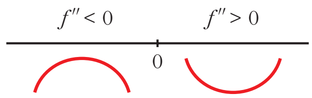
  $f'(x) > 0$ para todo $x \quad \to \quad f(x)$ es creciente.

  No tiene máximos ni mínimos.

- $f''(x) = 6x$

  $f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \quad \to \quad x = 0, \; f(0) = 4$

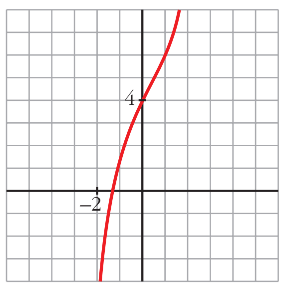
Signo de $f''(x)$:




Hay un punto de inflexión en $(0, 4)$.

- Además, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

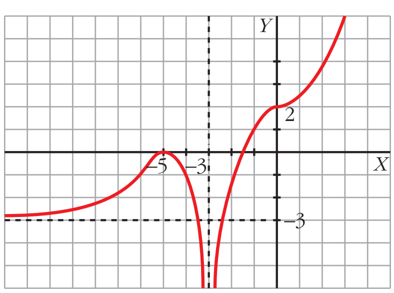
- Gráfica:




**2.** **Dibuja la gráfica de una función $f$ de la que sabemos:**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -3; \quad \lim_{x \to -3} f(x) = -\infty;$$

$$f'(-5) = 0; \; f'(0) = 0; \; f(-5) = 0; \; f(0) = 2$$




Tiene tangente horizontal en los puntos $(-5, 0)$ y $(0, 2)$. En el primero tiene un máximo, y en el segundo, un punto de inflexión.

**3.** **Estudia las asíntotas y los puntos singulares de $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 4}$ y represéntala gráficamente.**

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 4}$$

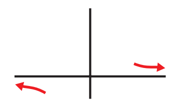
- Dominio: $\mathbb{R}$

- Asíntotas:

  No tiene asíntotas verticales, ya que $x^2 + 4 \neq 0$.

Horizontales: $y = 0$, ya que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{6x}{x^2 + 4} = 0$.

Posición $\left\langle \begin{array}{ll} \text{Si } x \to +\infty & f(x) > 0 \\ \text{Si } x \to -\infty & f(x) < 0 \end{array} \right.$

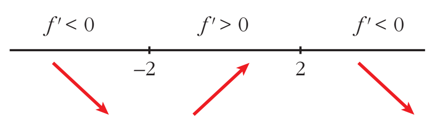


- Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + 4) - 6x \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-6x^2 + 24}{(x^2 + 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\to\; -6x^2 + 24 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = -2,\; f(-2) = -3/2 \\ x = 2,\; f(2) = 3/2 \end{array} \right.$$

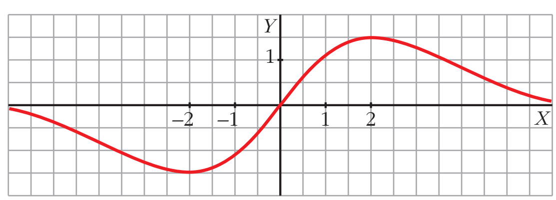
Signo de $f'(x)$:




Mínimo: $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$

Máximo: $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$

- Representación:




**4.** **Representa la función:** $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}}$

**Indica sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos.**

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$ No es derivable en $x = 2$.

Para $x < 2$, la gráfica es una parábola con vértice en (0, 4).

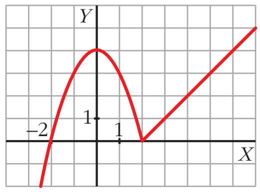
Para $x > 2$, es una recta.

$f'(x) = 0 \;\to\; -2x = 0 \;\to\; x = 0$

$f(0) = 2 \left\langle \begin{array}{l} f(x) \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty). \\ \text{Es decreciente en } (0, 2). \end{array} \right.$

Tiene un máximo en el punto (0, 4) y un mínimo en (2, 0).

Representación:




**5.** **Estudia y representa la función** $y = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$

- Dominio: $\mathbb{R} - \{3\}$
- Asíntotas verticales: $x = 3$, porque $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = \pm\infty$

Posición
$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$$

- Asíntotas horizontales:

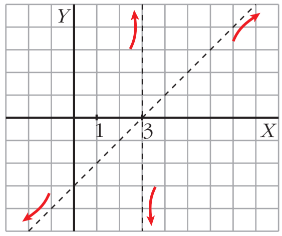
No tiene, porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = -\infty$

- Asíntotas oblicuas:

Expresamos la función de la forma $\dfrac{\text{Dividendo}}{\text{Divisor}} = \text{cociente} + \dfrac{\text{resto}}{\text{divisor}}$

$\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x - 3} = x - 3 + \dfrac{-4}{x - 3} \rightarrow y = x - 3$ es la asíntota oblicua.

Posición
Si $x \to +\infty$, $f(x) < x - 3$
Si $x \to -\infty$, $f(x) > x - 3$



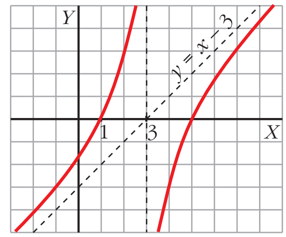

- Puntos singulares:

$$y' = \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)^2}$$

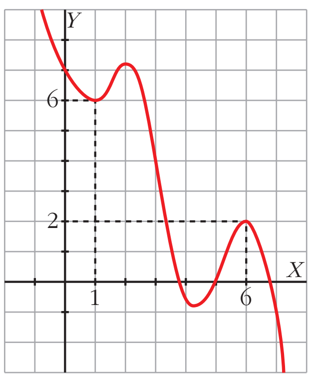
$$y' = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x + 13 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} \text{ (no tiene solución).}$$

Signo de $y'$: la derivada es positiva en todo el dominio. La función es creciente. No tiene máximos ni mínimos.

Corta a los ejes en los puntos $\left(0, -\dfrac{5}{3}\right)$, $(1, 0)$ y $(5, 0)$.




**6.** **Dibuja una función continua en $\mathbb{R}$ que tenga un mínimo relativo en (1, 6) y un máximo relativo en (6, 2). Si es un polinomio, ¿cuál será, como mínimo, su grado?**




La función tendrá, como mínimo, cuatro puntos singulares, y para ello, su grado debe ser, al menos, 5.

**7.** **Halla los máximos y los mínimos de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{e^x}$.**

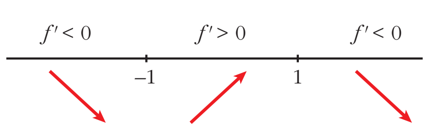
**¿Tiene asíntotas? Haz una gráfica aproximada de esta función.**

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x} \;\rightarrow\; f'(x) = \frac{2(x+1)\cdot e^x - (x+1)^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2+1}{e^x}$$

Buscamos los puntos en los que se anula la derivada:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{-x^2+1}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; -x^2 + 1 = 0 \;\begin{cases} x = -1, \; f(-1) = 0 \\ x = 1, \; f(1) = \dfrac{4}{e} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$:




Máximo $\left(1, \dfrac{4}{e}\right)$

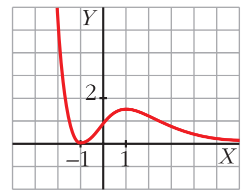
Mínimo $(-1, 0)$

Asíntotas:

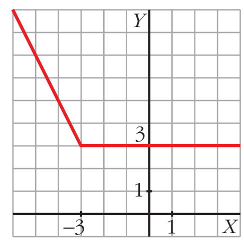
- No tiene asíntotas verticales, ya que $e^x \neq 0$.
- Horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \;\to\; y = 0 \text{ es asíntota hacia } +\infty.$$

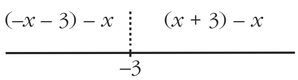
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty. \text{ No tiene asíntota hacia } -\infty.$$




**8.** **Dibuja la gráfica de $f(x) = |x + 3| - x$.**



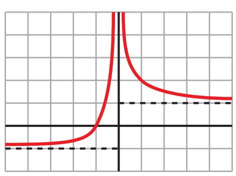

Definimos la función por intervalos:



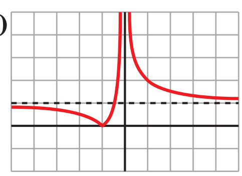

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ 3 & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

**9.** **¿Qué gráfica corresponde a $f(x) = \dfrac{x+1}{|x|}$?**

**a)**



**b)**



$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x} = -1 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \end{array}\right\}$$

- Asíntota vertical: $x = 0$
- Asíntotas horizontales: $y = -1$ e $y = 1$

La gráfica de $f$ es la a).