DIAPOSITIVA 1

INTRODUCCION: El siglo XIX fue muy importante para las Matemáticas. Se fundaron nuevas ramas, se asentaron muchas otras, y vivió uno de los tres matemáticos más grandes de la Historia: Gauss. Sólo de sus contribuciones se podría hablar durante horas, y, lógicamente, va a aparecer en esta exposición.

DIAPOSITIVA 2

En las JORNADAS SOBRE LA GRECIA CLÁSICA (en la que aparecía otro de los grandes, Arquímedes) se vio que las dos grandes contribuciones de dicho periodo fueron:

- El concepto de demostración: razonando paso a paso, utilizando para ello la Lógica Clásica (pitagóricos, siglo V aC).
- La idea de que no se puede demostrar absolutamente todo, y hay que aceptar ciertos supuestos iniciales, los AXIOMAS, a partir de los cuales se demuestra todo lo demás. Euclides, en el siglo III aC, fue el primero en tener esta idea y la aplicó para construir y demostrar la geometría.

DIAPOSITIVA 3

Durante 2000 años la Lógica y la Geometría Euclidiana no cambiaron y acabaron convirtiéndose en VERDADES ABSOLUTAS. De hecho, la Geometría Euclidiana se convirtió en un modelo de construcción del Conocimiento.

- En el siglo XVIII Pascal y Leibnitz imaginaron máquinas automáticas capaces de calcular y aplicar las reglas lógicas para realizar razonamientos.
- Descartes construyó su filosofía a partir del Axioma “pienso, luego existo”.
- El filósofo Inmanuel Kant intentó construir la Metafísica tomando como modelo la Geometría Euclidiana.

DIAPOSITIVA 4

Pero a lo largo del siglo XIX se fue comprendiendo que tanto la Geometría como la Lógica distaban mucho de ser tales verdades absolutas. Es más, parecía incluso que iba a ser imposible encontrar algunas bases sólidas sobre las que levantar el edificio de las Matemáticas, que estuvo tambaleándose hasta bien entrado el siglo XX.

DIAPOSITIVA 5

La primera en caer fue la geometría de Euclides que, para colmo, parecía un modelo de la realidad material (de la realidad plana, eso sí). Empezaremos contando cómo se planteó y cómo se afrontó su caída, pues esta historia ilustra perfectamente la forma moderna de trabajar en Matemáticas, a la vez que fue su inicio.

DIAPOSITIVAS 6 y 7

EL SISTEMA DE AXIOMAS DE EUCLIDES.

Las nociones y las definiciones comunes de Euclides se perciben como obvias por nuestra razón y nuestra intuición, tanto que nos es imposible pensar que alguna pudiera ser falsa en algún contexto. Lo mismo ocurre con los cuatro primeros postulados para la Geometría.

DIAPOSITIVA 8

Pero al llegar al quinto postulado, todos tenemos que hacer un esfuerzo para entenderlo, incluso teniendo delante la figura ilustrativa. Sin embargo, una vez comprendido, también lo percibimos claramente como verdadero.

El sistema de axiomas de Euclides fue tan bueno por tres motivos fundamentales:

- Es COMPLETO. A partir de ellos se puede demostrar toda la Geometría.
- Es CONSISTENTE. No permite llegar a contradicciones lógicas: si una proposición es verdadera, la contraria no puede ser verdadera también.
- NO es REDUNDANTE. Si se elimina cualquier axioma, ya no se puede construir toda la Geometría, quedan muchos Teoremas que no se pueden demostrar.

Sin embargo, hasta el propio Euclides no usó el quinto postulado hasta que no le quedó más remedio (el teorema número 28 de la construcción de la Geometría).

DIAPOSITIVA 9

Esto fue en el 300 aC. Durante siglos los matemáticos intentaron probarlo a partir de los otros, parecía demasiado artificial para ser un axioma básico. Pero fue pasando el tiempo y muchas personas en muchas partes del mundo lo intentaron y fracasaron, y muchas creyeron haberlo demostrado, pero cayendo en un círculo vicioso al basarse en proposiciones equivalentes (la definición no puede entrar en lo definido, la conclusión de un teorema no se puede usar en medio del mismo).

Las formulaciones equivalentes del quinto postulado más importantes que se encontraron son:

- “Por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única recta paralela a la recta inicial”.
- “La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es siempre 180º”.

Nosotros intuimos verdaderas estas formulaciones sin mucho esfuerzo. Fueron un pequeño avance porque el quinto postulado quedaba de manera mucho más sencilla, aunque seguía siendo más complejo que los demás.

La gran idea fue del italiano Girolamo Saccheri (1667-1733): demostrar el quinto postulado demostrando que NO podía ser falso, que si fuese falso se llegaría a una fuerte contradicción (esta técnica, conocida desde la Grecia Clásica, se conoce como “REDUCCIÓN AL ABSURDO”). Saccheri partió de los axiomas originales de Euclides, pero cambiando el quinto postulado por uno que lo negaba.

Primero lo cambió por “la suma de los tres ángulos de un triángulo es mayor de 180º”. La geometría “obtusa” que así creó le llevó rápidamente a una contradicción.

Contento, prosiguió a desarrollar la geometría “aguda”, cambiando el quinto postulado por “la suma de los tres ángulos de un triángulo es menor de 180º”. Sin embargo, no encontró la contradicción tan fácilmente como en el caso anterior. De hecho, pasaban los días y no se acercaba a ella. Saccheri se puso nervioso y estuvo agobiado mucho tiempo, porque, de no hallar la contradicción, estaría ante un SISTEMA DE AXIOMAS COMPLETO, CONSISTENTE Y NO REDUNDANTE que creaba una geometría que nada tenía que ver con la realidad ni con la Geometría Euclidiana.

Y en aquella época, DUDAR DE EUCLIDES ERA DUDAR DE LA VERDAD ABSOLUTA, DEL MUNDO REAL. Saccheri acabó autosugestionándose y creyó detectar una contradicción, con lo que pudo dormir tranquilo el resto de su vida.

DIAPOSITIVA 10

De esta manera llegamos a Gauss, en el siglo XIX, que dijo lo siguiente con relación al quinto postulado: “En la teoría de las paralelas no estamos hoy más avanzados que Euclides. Esta es una parte vergonzosa de las matemáticas...”

- La Geometría Aguda.
    - En 1815 Gauss ya tenía claro que el quinto postulado es una PROPOSICION INDECIDIBLE, que no se puede deducir de los demás axiomas su verdad o falsedad, y descubrió la GEOMETRÍA AGUDA al igual que Sacheri. Y, al igual que Sacheri, tuvo miedo y no se atrevió a publicar sus resultados, pese a ser el mejor y más reputado matemático de su época. No fue capaz de enfrentarse a los 2000 años de reinado de la “verdad absoluta” de la Geometría Euclidiana hasta que se enteró de que otro matemático, Bolyai, había llegado a las mismas conclusiones que él. Entonces salió para dejar claro que él lo había descubierto antes y llevarse el mérito (sin embargo, el primero fue un matemático ruso, Lobachevski, cuyo trabajo no se conoció hasta muchos años después por haberlo publicado en ruso).
    - En la Geometría Aguda el quinto postulado es “por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una recta paralela a la recta dada” (de hecho, hay infinitas rectas que lo hacen)
- La Geometría Obtusa.
    - Un discípulo de Gauss, Riemann, se dio cuenta en 1854 de que si se cambiaba el postulado II, “toda recta se puede prolongar indefinidamente”, por “todas las rectas son finitas” se podía construir la GEOMETRÍA OBTUSA, aquélla en la que la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre mayor de 180º.
    - En la Geometría Obtusa el quinto postulado es “por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna recta paralela a la recta dada”.

DIAPOSITIVA 11

En estas Geometrías NO euclídeas la definición de recta es más amplia, más general que en la Geometría Euclidiana. Se entiende por recta a la trayectoria más corta que hay que seguir para ir de un punto a otro, y también recibe el nombre de geodésica.

El modelo de Geometría Obtusa es la geometría sobre la esfera: el camino más corto entre dos puntos es un trozo de círculo máximo (los meridianos y el ecuador de la Tierra, supuesta esférica, son ejemplos de círculos máximos). En la figura podemos ver cómo los ángulos de un triángulo suman más de 180º, y cómo no puede haber círculos máximos – rectas – que no se corten, que sean paralelos).

El modelo de la Geometría Aguda es la geometría sobre la pseudoesfera: el camino más corto es aquí siempre un trozo de hipérbola. En la figura podemos comprobar que la suma de los ángulos del triángulo es ahora menor de 180º, y que por lo menos se pueden trazar dos rectas paralelas a una dada que pasen por un punto exterior a ella.

DIAPOSITIVA 12

La Geometría Obtusa es la geometría del planeta Tierra. A pequeña escala, la superficie de la Tierra es prácticamente plana (lo que se creyó hasta el descubrimiento de América) y sobre ella funciona la Geometría Rectangular o Euclídea. Sin embargo, en realidad es casi esférica y sobre ella no se pueden trazar líneas rectas infinitas, sino, a lo sumo, círculos máximos, y es la Geometría Esférica la que hemos de usar.

DIAPOSITIVA 13

Pero es más: el propio Universo tiene una geometría esférica. Ya Gauss intentó formar un gran triángulo con rayos de luz (que deben seguir trayectorias geodésicas) entre montañas para estudiar la suma de los tres ángulos, pero no pudo concluir nada debido a la tecnología de la época. A principios del siglo XX fue Einstein quien utilizó una geometría esférica para el Universo en su Teoría de la Relatividad. La primera confirmación experimental se obtuvo en 1919 observando en un eclipse el cambio en la posición aparente de las estrellas próximas a la corona solar, que indicaba que su luz seguía una trayectoria curva para llegar a la Tierra, exactamente como predecían las ecuaciones de Einstein.

La Geometría Aguda también encontró una aplicación en las ecuaciones de Einstein: en ciertos contextos, al utilizar el tiempo como "cuarta dimensión" aparece una superficie, conocida vulgarmente como "silla de montar" (su nombre técnico es paraboloide hiperbólico) en la que las geodésicas son ramas hiperbólicas y su geometría, por tanto, es Pseudoesférica.

En definitiva, tras la crisis de la Geometría Euclídea tenemos tres geometrías completas, consistentes y no redundantes. Ninguna es ni mejor ni peor, ni más verdadera o falsa que las otras. Todas son útiles y todas son verdaderas según el contexto en el que se trabaje.

DIAPOSITIVA 16

LA FUNDAMENTACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

Durante el siglo XIX la Teoría de Conjuntos se estaba usando en la base de diversas ramas de las Matemáticas, pero de forma intuitiva y poco rigurosa, y se veía claramente relacionada con la Lógica, como podemos entender con el ejemplo de esta diapositiva. Es natural que surgiera la intención de construir todas las Matemáticas a partir de la Lógica, y también la de hacerlo a partir de la Teoría de Conjuntos.

Aquí es cuando empezaron a surgir los problemas de VERDAD. Se llegó a un punto en el que parecía que nada funcionaba y que no iba a ser posible obtener ninguna verdad ni ningún conocimiento, pues los fallos se encontraron en la base, en el punto de partida de la Lógica y la Teoría de Conjuntos.

DIAPOSITIVAS 17 y 18

PARADOJAS LÓGICAS.

Ya dijimos que un sistema de axiomas es CONSISTENTE cuando no se pueden producir contradicciones en su interior: por ejemplo, no pueden demostrarse un teorema y el contrario a la vez, o si una proposición es verdadera la contraria debe ser falsa.

- La Paradoja del Mentiroso.
    - Yo soy matemático y afirmo: "Todos los matemáticos son unos mentirosos". ¿Estoy diciendo la verdad o no? Si estoy diciendo la verdad, mi afirmación sería verdadera, con lo que debería estar ...¡mintiendo! ¡Contradicción! Pero si estoy mintiendo, lo que he dicho tiene que ser falso, con lo que debería estar ...¡diciendo la verdad! ¡Contradicción también!
    - "Esta frase es falsa". ¿Es una frase verdadera o falsa? No podemos decirlo, pues acabamos razonando en círculos como en el ejemplo anterior.
    - "Esta frase consta de siete palabras" es una afirmación claramente falsa, por lo que la contraria debería ser verdadera. Pero la afirmación contraria es "Esta frase NO consta de siete palabras", y resulta que SÍ tiene siete palabras, con lo que es falsa también. Tenemos una proposición que tanto ella como la contraria son falsas. ¿Cuál es la verdad?
    - En la diapositiva 18 aparece una variante de la Paradoja del Mentiroso que podemos encontrar en ¡El Quijote! ;)

DIAPOSITIVA 19

- La Paradoja de Russell. Bertrand Russell, que además era filósofo, quería construir las Matemáticas a partir de la Lógica. Cuando tenía ya su trabajo avanzado, encontró la paradoja que lleva su nombre.
  - Como vemos en la diapositiva, hay conjuntos que se tienen a sí mismos como elemento, y otros que no. Por tanto, se puede hablar del conjunto de todos los que son de éste último tipo: "el conjunto de todos los conjuntos que no se tienen a sí mismos como elemento".
  - El conjunto del que hablamos: ¿se tiene a sí mismo como elemento? Raqzonemos como razonemos, acabamos atrapados en otro círculo vicioso parecido al de la Paradoja del Mentiroso.

DIAPOSITIVA 20

EL HOTEL DEL INFINITO

- El Hotel del Infinito. En una galaxia muy lejana hay un hotel con infinitas habitaciones, con el cartel de "Completo". Las habitaciones son la número 1, la número 2, la número 3, etc...
  - Un día llega un conductor de un ovni, y se queda muy apesadumbrado cuando le comunican que todas las habitaciones están ocupadas.
  - Pero el recepcionista traslada a cada cliente a la habitación siguiente, con lo que queda la habitación número 1 para el agradecido conductor del ovni.
  - Más tarde llegan cinco personas desesperadas por encontrar alojamiento. El recepcionista encuentra habitación para todas: traslada cinco habitaciones hacia adelante a cada cliente, dejando las habitaciones 1, 2, 3, 4 y 5 para los recién llegados.
  - De repente, llega una lanzadera con infinitas personas de un Congreso de Chicles. ¡El recepcionista vuelve a encontrar sitio para todo el mundo! Lo consigue trasladando a cada cliente a la habitación cuyo número es el doble de la que está ocupando, de manera que las infinitas habitaciones con número impar quedan disponibles para los infinitos clientes sorpresa.
- ¿Qué nos muestra esta paradoja? Nuestra intuición nos dice que el número total de habitaciones es el doble que el número de habitaciones pares. Pero lo que hemos razonado es que LA CANTIDAD TOTAL DE HABITACIONES ES IGUAL A LA CANTIDAD DE HABITACIONES PARES. Dicho desde otra perspectiva: el conjunto de los números naturales (1, 2, 3, etc.., los números que usamos para contar y ordenar) tiene tantos elementos como el subconjunto de los números pares.

DIAPOSITIVA 21

LOS CONJUNTOS INFINITOS.

Fue George Cantor, que intentaba construir las Matemáticas a partir de la Teoría de Conjuntos, el que se encontró con múltiples resultados contrarios a la intuición y al sentido común, al estudiar de forma seria los conjuntos con infinitos elementos. Dichos conjuntos aparecen por todas partes desde el principio de las Matemáticas: los números más sencillos que usamos, los naturales, constituyen un conjunto infinito; los puntos de un segmento, la cantidad de decimales de π y los números irracionales, etc ...

- El primer resultado que obtuvo Cantor fue el que acabamos de encontrar en el Hotel del Infinito: en un conjunto infinito hay subconjuntos que tienen la misma cantidad de elementos que él. Es más: Cantor caracterizó precisamente los conjuntos infinitos como aquéllos en los que es posible que una parte del conjunto tenga tantos elementos como todo el conjunto. O sea, en los conjuntos infinitos NO SIEMPRE EL TODO ES MAYOR QUE

LA PARTE.

- Otro resultado muy importante fue: NO TODOS LOS CONJUNTOS INFINITOS TIENEN LA MISMA CANTIDAD DE ELEMENTOS. Dicho de otra forma, hay infinitos más grandes que otros. Este resultado lo consiguió demostrando que el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto siempre tiene más elementos que el conjunto original (si el conjunto original es el de las personas que hay en el salón de actos, el conjunto de todos los subconjuntos es el que tiene todos los posibles grupos de personas que se pueden formar: posibles parejas, tríos, cuartetos, quintetos, etc).

DIAPOSITIVA 22

LA ESCALERA DE ÁLEFS

Cantor utilizó una letra hebrea para denotar a las cantidades infinitas: א (álef).

- La cantidad más pequeña que hay que manejar es la que corresponde a los números naturales (o los números pares, o los impares, etc): $\aleph_0$
- Otra cantidad que nos encontramos es la del conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los números naturales: Cantor la llamó $\aleph_1$. Esta cantidad es la misma que la de todos los conjuntos que vemos en la diapositiva.
- Ahora bien, podemos continuar con el conjunto de todos los subconjuntos de cualquier conjunto anterior, llegando a $\aleph_2$. Y así hasta el infinito (¡qué vértigo!)

DIAPOSITIVA 23

MONSTRUOS DE LA MENTE. CURVAS PATOLÓGICAS.

A finales del siglo XIX aparecieron construcciones geométricas como las que vemos en la diapositiva, que hoy en día conocemos con el nombre de fractales. Los fractales tienen una característica en común: se construyen a partir de unas pocas reglas básicas que se repiten hasta el infinito. En aquella época de crisis, muchos matemáticos fueron incapaces de trabajar con ellas por considerarlas “divertimentos sin sentido” o “monstruos del pensamiento”.

- La primera es de David Hilbert, al que le debemos, entre otras cosas, la moderna construcción de la Geometría Euclídea. Ideó esta curva perfeccionando una idea de Peano, (que fue el acabó construyendo la Aritmética sobre la que se fundamenta el Análisis Matemático actual), para demostrar que el número de puntos de una línea es igual al número de puntos de un cuadrado, al repetir el proceso infinitas veces.
- Debajo vemos la aplicación de la misma idea para llenar un cubo con una línea.
- A la derecha encontramos el copo de nieve de Von Koch: este fractal tiene, tras repetir el proceso infinitas veces, un borde de longitud infinita que, sin embargo, encierra una superficie finita y limitada. Además, la figura creada imita a la naturaleza con una perfección asombrosa.

DIAPOSITIVA 24

¿CÓMO RECONSTRUIR LAS BASES?

- Nueva definición de conjunto que evite la aparición de conjuntos paradójicos (de hecho la propia definición de conjunto de Cantor no era demasiado buena).
- Hay que tener mucho cuidado con el concepto de infinito es todos sus aspectos. A fin de cuentas, ningún ser humano ha estado en el infinito o ha realizado un proceso infinitas veces. El infinito se sale de nuestra experiencia directa y de nuestra comprensión.

Todos los problemas y paradojas que hemos encontrado hasta ahora están relacionados de un modo u otro con los dos puntos que acabamos de mencionar.

DIAPOSITIVA 25

LA CONTROVERSIA SOBRE LOS FUNDAMENTOS.

La solución a las cuestiones anteriores se enfocó de diferentes formas por los matemáticos de la época, y se dividieron en tres corrientes principales.

- INTUICIONISTAS (DIAPOSITIVA 26).
- LÓGICOS (DIAPOSITIVA 27).
- FORMALISTAS (DIAPOSITIVA 28).

DIAPOSITIVAS 29 Y 30

En la actualidad, las Matemáticas que estudiamos se corresponden más con las ideas de los formalistas, aunque las corrientes se han mezclado con el paso de los años y de los nuevos descubrimientos, y se han complementado las unas a las otras. Lo que estudiamos ahora parece un cuerpo inexpugnable del conocimiento , pero en realidad se trata de una construcción dinámica que nunca para de crecer y de redefinirse a sí misma. También nos parece algo ajeno a nuestros intereses y a nuestra realidad, pero es justamente lo contrario, ya que somos nosotros los que decidimos cómo vamos a interpretar la realidad según nos interesa.